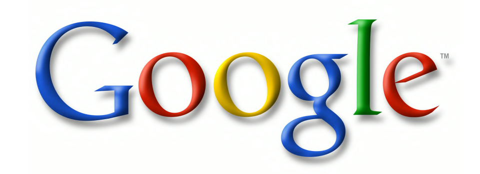
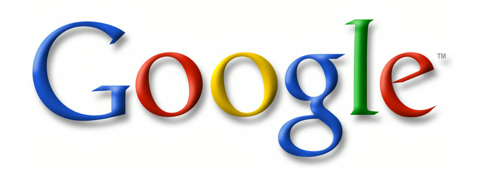
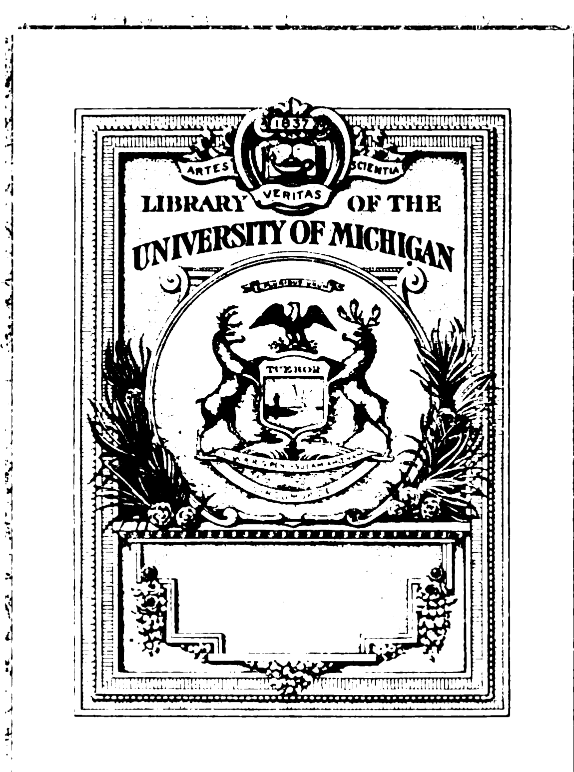
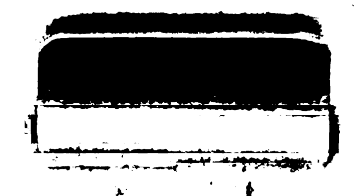
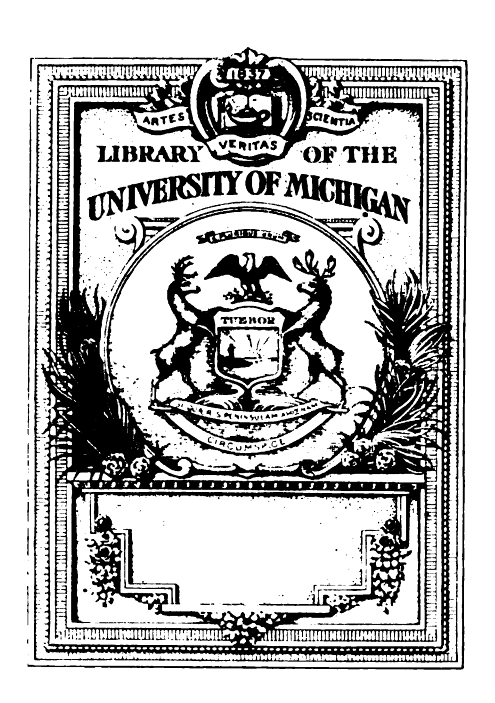


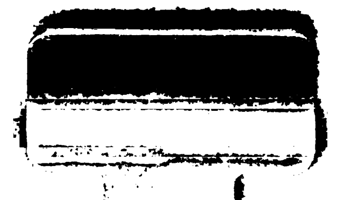



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR






ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR







Lehrbuch

des

Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen.

Mit 221 Erklärungen und 38 in den Text gedruckten Figuren.

Mit einer

Sammlung von 269 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben

nebst den

Resultaten der ungelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis.

Für das Selbstudium und zum Gebrauche an Lehranstalten

bearbeitet von

Richard Krüger.

Stuttgart.

Verlag von Julius Maier.

1891.

Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

Vorwort.

Zum Verständnis des vorliegenden, das Rechnen mit imaginären und komplexen Zahlen behandelnden Werkes ist die Bekanntschaft mit den Elementen der Algebra (einschliesslich der Gleichungen vom ersten Grade und der Potenz- und Wurzelrechnung), sowie der Planimetrie, der ebenen Trigonometrie (Goniometrie) und der Logarithmenrechnung erforderlich.

Nach den Erfahrungen, welche ich mir während einer elfjährigen Thätigkeit als Lehrer der Mathematik an technischen Lehranstalten erworben habe, bereiten die imaginären und komplexen Zahlen dem Studierenden meistens grosse Schwierigkeiten. Da aber die Geläufigkeit im Rechnen mit diesen Zahlen das Studium der Integralrechnung, der Auflösung der Gleichungen höheren Grades u. s. w. sehr erleichtert, so kann dem Anfänger nicht dringend genug empfohlen werden, sich diese Fertigkeit anzueignen, bevor er sich dem Studium der höheren Mathematik zuwendet.

Das vorliegende Buch ist dazu bestimmt, den Studierenden mit den wichtigsten Gesetzen und Formeln für das Rechnen mit imaginären und komplexen Zahlen und ihren Anwendungen vertraut zu machen. In demselben habe ich zunächst den Faktor i erklärt, sodann die Beziehungen zwischen der positiven und der negativen imaginären Einheit gezeigt, und darauf die Regeln für das Rechnen mit imaginären Zahlen entwickelt. Ich bin dann übergegangen zu der Erklärung der komplexen Zahlen und habe in dem hierauf folgenden Abschnitte das Rechnen mit diesen Zahlen gelehrt. Die sich anschliessende graphische und trigonometrische Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen bildet die Einleitung zum graphischen und trigonometrischen Rechnen. Ich hatte erst die Absicht, beide Rechnungsarten in gesonderten Abschnitten zu behandeln, gab dies aber auf, weil zahlreiche Wiederholungen notwendig geworden wären; auch erschien mir eine Vereinigung beider Rechnungsarten schon deswegen für vorteilhafter, weil bei den Uebungsaufgaben die eine Methode zur Kontrolle der anderen benutzt werden konnte.

Auf das graphische und trigonometrische Radizieren folgt die Auflösung der binomischen Gleichungen, weil die Wurzeln dieser Gleichungen den Werten der $n$ten Wurzeln aus ± 1 entsprechen.

Im nächsten Abschnitte habe ich die Beziehungen zwischen den Potenzen von Sinus und Cosinus eines Winkels und dem Sinus und Cosinus vom Vielfachen

dieses Winkels gezeigt; ich glaubte sie in meinem Werke nicht unerörtert lassen zu dürfen, weil die sich hieraus ergebenden Formeln für die Integralrechnung Bedeutung haben.

Die wichtige Exponentialreihe und einige ihrer Anwendungen auf die in diesem Buche behandelten Probleme bilden das Schlusskapitel.

Alle Werke, welche ich bei meiner Arbeit benutzt habe, sind im „Litteratur-Verzeichnis" von mir aufgeführt worden.

Ich bin eifrig bemüht gewesen, die Fragen möglichst leicht verständlich zu beantworten, die Gesetze eingehend zu beweisen, die Formeln unter Angabe aller in Betracht kommenden Regeln ausführlich zu entwickeln und die Anwendung derselben durch zahlreiche, vollständig gelöste Uebungsaufgaben genügend zu erläutern. Und so gebe ich mich der Hoffnung hin, dass ein grosser Kreis junger Mathematiker mein Werk auch ohne weitere Anleitung wird mit Nutzen studieren können.

Möge meine Arbeit beim Publikum und bei der Kritik eine wohlwollende Aufnahme finden und Gutes stiften!

Schliesslich halte ich es für meine Pflicht, an dieser Stelle meinem Herrn Verleger für die gute Ausstattung dieses Buches und Herrn Dr. phil. A. Kleyer für seine freundliche Unterstützung meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Ottweiler, im April 1891.

Richard Krüger.

Inhaltsverzeichnis.

Die imaginären und komplexen Zahlen.

Anhang.

Die imaginären und komplexen Zahlen.

Anmerkung 1. Die allgemeine Arithmetik ist die Lehre von den Zahlen und deren Formen und Verhältnissen. Von den verschiedenen Arten der Zahlen sind die sogenannten imaginären (und die aus ihnen hervorgegangenen komplexen) Zahlen für alle Teile der Mathematik von der grössten Wichtigkeit. Es bedurfte grosser Anstrengungen der bedeutendsten Mathematiker — wir nennen: d'Alembert, Bernoulli, Euler, Moivre, Gauss —, um dies zum allgemeinen Bewusstsein der mathematischen Gelehrtenwelt zu bringen. Die meisten Mathematiker des vorigen Jahrhunderts erkannten nicht die hohe Bedeutung der imaginären Zahlen, sie verwarfen sie, weil sie mit den sogenannten reellen Zahlen begrifflich nicht in Beziehung gebracht, durch sie nicht dargestellt werden konnten. Sie glaubten, dass, wenn eine Lösung auf imaginäre Zahlen führe, dies lediglich die Unmöglichkeit desjenigen Problems andeute, auf welches sich die betreffende Lösung beziehe. Ja, als Gauss bereits eine streng wissenschaftlich begründete Theorie der imaginären Zahlen veröffentlicht hatte (1831), gab es noch immer hervorragende Mathematiker, wie z. B. Cauchy, welche diesen Zahlen jede Existenzberechtigung absprachen.

Es erging also den imaginären Zahlen ähnlich wie zwei Jahrhunderte vorher den negativen Zahlen, welche anfänglich nicht als Differenzen mit grösserem Subtrahendus anerkannt wurden. Mit diesen, sowie mit den irrationalen Zahlen und den rationalen Brüchen sind die imaginären Zahlen jedoch zum mindesten auf eine gleiche Stufe zu stellen.

Dass man die imaginären Zahlen, welche bei der Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade Berücksichtigung gefunden hatten, so lange Zeit „aus einem falschen Gesichtspunkte betrachtet und eine geheimnisvolle Dunkelheit bei ihnen gefunden hat", schreibt Gauss grösstenteils der „wenig schicklichen Bezeichnung" zu. Hätte man die imaginäre Einheit (vergl. Antwort auf Frage 2) z. B. „laterale Einheit" genannt, so hätte — nach seiner Ansicht — von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können.[1])

[1]) Siehe das Litteraturverzeichnis am Schlusse dieses Werkes.

Anmerkung 2. Die hohe Bedeutung, welche die imaginären und komplexen Zahlen für die Entwickelung mathematischer Gesetze und besonders für die algebraischen Gleichungen höheren Grades besitzen, wird der Studierende dieses Werkes zur Genüge kennen lernen. Er wird finden, dass die ausgezeichneten Eigenschaften dieser Zahlen es oft ermöglichen, grosse, sich bei der Rechnung einstellende Schwierigkeiten zu üderwinden und schneller als auf jedem anderen Wege zur Entdeckung neuer Wahrheiten zu gelangen.

Deswegen ist diesen Zahlen in dieser Encyklopädie ein besonderer Band — der vorliegende — gewidmet worden.

A. Ueber die imaginären Zahlen.

Anmerkung 3. Zum Verständnis der in diesem Teile vorgeführten Formelentwickelungen und Berechnungen sind diejenigen Kenntnisse der Algebra — besonders der Gleichungen vom ersten Grade und der Potenz- und Wurzelrechnung — erforder-

lich, welche durch das Studium der in dieser Encyklopädie erschienenen Lehrbücher der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten, bezw. der Potenzen und Wurzeln erworben werden können.

1) Ueber die imaginären Zahlen und deren Einheiten im allgemeinen.

Frage 1. Was versteht man unter imaginären Zahlen im engeren Sinne, was im weiteren Sinne, und auf welche Weise werden solche Zahlen dargestellt?

Antwort. Zahlen (und nur solche), die in die zweite Potenz erhoben eine negative Zahl ergeben, heissen imaginäre Zahlen im engeren Sinne. Dargestellt wird eine solche Zahl durch das Symbol:

$$\sqrt{-a}$$

Denn nach dem gegebenen Kriterium ist:

$$(\sqrt{-a})^2 = -a \quad \text{(siehe Erkl. 5)}$$

Zahlen (und nur solche), die in eine gerade (z. B. n te) Potenz erhoben eine negative Zahl ergeben, heissen imaginäre Zahlen im weiteren Sinne. Dargestellt wird eine solche Zahl durch das Symbol:

$$\sqrt[n]{-a}$$

Denn nach dem gegebenen Kriterium ist:

$$(\sqrt[n]{-a})^n = -a$$

Erkl. 1. Das Wort „imaginär" stammt von dem lateinischen Worte imago (Bild) und bedeutet: „nur in der Einbildung beruhend" oder auch „unmöglich". — Es wurde zuerst von Descartes (Géom. III) als Prädikat der Wurzeln von Gleichungen angewendet.

Erkl. 2. Das Wort „Symbol" (griech.) bedeutet: „Zeichen" oder „Sinnbild".

Erkl. 3. Das Wort „Kriterium" (griech.) bedeutet: „Kennzeichen".

Erkl. 4. Die Definition (Erklärung) der Wurzelausziehung ist im Folgenden gegeben:

„Aus einer Zahl a die n te Wurzel ausziehen, heisst, eine dritte Zahl b bilden, welche zur n ten Potenz erhoben die Zahl a hervorbringt."

In Zeichen:

$$\sqrt[n]{a} = b$$

wenn:

$$b^n = a \text{ ist.}$$

Erkl. 5. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Potenziert man eine Wurzel auf den Grad ihres Wurzelexponenten, so hebt sich die Wurzel gegen die Potenz und man erhält den Radikandus."

In Zeichen:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Z. B.:

$$(\sqrt[2]{+25})^2 = +25$$

denn:

$$(\sqrt[2]{+25})^2 = (\pm 5)^2 = +25$$

Erkl. 6. Die imaginäre Zahl im engeren Sinne $(\sqrt{-a})$ wird auch „imaginäre Quadratwurzel" genannt.

Erkl. 7. Aus der Definition der Wurzel (siehe Erkl. 4) ergeben sich folgende Sätze:

1) Jede **gerade** Wurzel aus einer **positiven** Zahl ist **biform** (siehe Erkl. 7a), nämlich **positiv und negativ**, denn nicht nur die positive, sondern auch die negative Zahl gibt zu einer geraden Potenz erhoben ein positives Produkt. — So ist z. B. $\sqrt{+36} = +6$ und $= -6$, weil sowohl $(+6)^2$ als auch $(-6)^2$ den Radikandus $+36$ hervorbringt.

Dargestellt wird dieses Gesetz durch:

$$\sqrt[2n]{+(a^{2n})} = +a \text{ und } = -a$$

2) Jede **ungerade** Wurzel aus einer **negativen** Zahl ist **nur eindeutig**, nämlich **nur negativ**, denn nur eine negative Zahl gibt zu einer ungeraden Potenz erhoben ein negatives Produkt. — So ist z. B. $\sqrt[3]{-125} = -5$, weil nur $(-5)^3 = -125$ ist.

Dargestellt wird dieses Gesetz durch:

$$\sqrt[2n+1]{-(a^{2n+1})} = -a$$

3) Eine **gerade** Wurzel aus einer **negativen** Zahl gibt **weder eine positive noch eine negative** Zahl. — So ist z. B. $\sqrt[2]{-81}$ weder $+9$ noch -9, weil $(+9)^2$ und $(-9)^2$ **nicht** $= -81$ sind. Ueberhaupt gibt es in dem ganzen Gebiete der sogenannten **reellen** Zahlen (siehe Erkl. 11) keine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl, deren Quadrat eine **negative** Zahl ist. Die Unmöglichkeit, unter den reellen Zahlen eine zu finden, welche z. B. $\sqrt[2]{-81}$ vollständig entspricht, führte auf die in der Antwort auf Frage 1 gegebene Definition der **imaginären** Zahlen.

Erkl. 7a. Das Wort „**biform**“ (auch „biformis“) stammt vom Lateinischen bis (zweimal) und forma (die Gestalt) und bedeutet also „zweigestaltig“ oder „doppeldeutig“.

Frage 2. Was versteht man unter den **Einheiten der imaginären Zahlen** und auf welche Weise gelangt man zu denselben?

Antwort. Unter den imaginären Einheiten versteht man die Symbole:

$$+\sqrt[2]{-1} \text{ und } -\sqrt[2]{-1}$$

Man gelangt zu denselben mit Hilfe der in den Erkl. 8 und 9 aufgeführten Sätze, indem man eine, allgemein durch $\sqrt[2n]{-a}$ dargestellte, imaginäre Zahl umformt, wie folgt:

$$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[n]{\sqrt[2]{-a}} \text{ (nach Erkl. 8)}$$

Erkl. 8. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Eine Wurzel wird radiziert, indem man die Wurzelexponenten mit einander multipliziert.“

In Zeichen:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Umgekehrt ist:

$$\sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

Erkl. 9. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Ein Produkt wird radiziert, indem man jeden einzelnen Faktor radiziert.“

In Zeichen:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Umgekehrt ist auch:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Erkl. 10. Bei einer durch $\sqrt[2]{-a}$ dargestellten imaginären Zahl hat man stets zu unterscheiden, ob $+\sqrt[2]{-a}$ oder $-\sqrt[2]{-a}$ gemeint ist, ob sie also positiv oder negativ sein soll.

Erkl. 11. Die Einführung der imaginären Zahlen führte zur Bezeichnung aller übrigen Zahlen als reelle (oder auch reale, wirkliche). Man versteht also unter reellen Zahlen alle die durch Multiplikation und Division aus $+1$ und -1 abgeleiteten Zahlen. Die Reihe der reellen Zahlen und die der imaginären haben nur die Null gemeinschaftlich.

Erkl. 12. Das Wort „absolut“ stammt aus dem Lateinischen und bedeutet „abgelöst“. In der Mathematik ist die absolute Zahl eine Zahl ohne Rücksicht auf das sie begleitende Zeichen. Die Zahlen $+5$, -5, $+5i$, $-5i$ haben sämtlich den absoluten Wert 5.

Erkl. 13. Lässt sich eine Wurzel durch eine ganze Zahl oder durch einen Bruch genau ausdrücken, so heisst sie rational, andernfalls irrational. Die Irrationalzahl ist demnach eine Zahl, welche sich nicht mehr als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lässt.

Erkl. 14. Das ganze Zahlengebiet zerfällt in:

1) reelle Zahlen;
   a) rationale Zahlen;
      α) ganze Zahlen;
      β) gebrochene Zahlen;
   b) irrationale Zahlen;
2) imaginäre Zahlen.

Letztere sind an sich weder rational, noch irrational, sie können aber, wie die reellen Zahlen, positiv oder negativ sein.

und

$$\sqrt[2]{-a} = \sqrt[2]{a \cdot (-1)} = \sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[2]{-1}$$
(nach Erkl. 9)

Da nun $\sqrt[2]{a}$ eine reelle Zahl (siehe Erkl. 11) ist — aus welchem Grunde auch in dem Ausdrucke $\sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[2]{-1}$ der Faktor $\sqrt[2]{a}$ „reeller Faktor“ genannt wird — und diese reelle Zahl sowohl positiv als auch negativ ist, so erhält man:

$$\sqrt[2]{-a} = +r \cdot \sqrt[2]{-1} \text{ bezw. } = -r \cdot \sqrt[2]{-1}$$

oder:

$$\sqrt[2]{-a} = r \cdot (+\sqrt[2]{-1}) \text{ bezw. } = r \cdot (-\sqrt[2]{-1})$$

wenn der aus dem reellen Faktor resultierende absolute Wert mit r bezeichnet wird. Hieraus ergibt sich der Satz:

„Jede imaginäre Zahl ist gleich einem Produkte aus einem reellen und einem imaginären Faktor.“

Der reelle Faktor stellt eine rationale oder eine irrationale Zahl (siehe Erkl. 13) dar, der imaginäre Faktor die imaginäre Einheit (siehe die Aufgaben 1 bis 4).

Frage 3. Welche kürzere Bezeichnung ist für die Symbole $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ in die Wissenschaft eingeführt worden?

Antwort. Die imaginäre Einheit $+\sqrt{-1}$ wird nach Gauss (Disquisitiones arithmeticae, Sect. VII, Art. 337) mit dem ersten Buchstaben des Wortes „imaginär“ bezeichnet.

Man schreibt also für:

$$\pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2}\cdot i = \pm a\cdot i$$

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. Man scheide aus $\sqrt[2]{-25}$ die imaginäre Einheit aus und bestimme, ob der reelle Faktor rational oder irrational ist.

Auflösung. Man erhält (nach Antwort auf Frage 2):

$$\sqrt[2]{-25} = \sqrt[2]{25\cdot(-1)} = \sqrt[2]{25}\cdot\sqrt[2]{-1} = \pm 5i$$

Der reelle Faktor dieser imaginären Zahl gibt demnach eine rationale Zahl (siehe Erkl. 13).

Aufgabe 2. Man stelle $\sqrt[2]{-6}$ als ein Produkt aus einem reellen und einem imaginären Faktor dar und bestimme, ob ersterer rational oder irrational ist.

Auflösung. Nach der Antwort auf die Frage 2 erhält man:

$$\sqrt[2]{-6} = \sqrt[2]{6\cdot(-1)} = \sqrt[2]{6}\cdot\sqrt[2]{-1}$$
$$= \pm 2{,}44949\cdots i$$

Der reelle Faktor gibt also hier eine Irrationalzahl (siehe Erkl. 13).

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 3. Man scheide aus $\sqrt[2]{-121}$ die imaginäre Einheit aus und bestimme, ob der reelle Faktor rational oder irrational ist.

Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 1.

Aufgabe 4. Man stelle $\sqrt[2]{-5}$ als ein Produkt aus einem reellen und einem imaginären Faktor dar und bestimme, ob ersterer rational oder irrational ist.

Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 2.

2) Ueber die imaginären Einheiten im besonderen.

Frage 4. Welche Beziehungen bestehen zwischen der positiven und der negativen imaginären Einheit, und auf welche Weise lässt sich die Richtigkeit der Behauptungen darthun?

Antwort. Zwischen der positiven und der negativen imaginären Einheit bestehen folgende Beziehungen:

a) $$-i = \frac{1}{+i}$$

in Worten:

„Die negative imaginäre Einheit ist gleich dem Reciproken (siehe Erkl. 15) der positiven.“

Beweis. Setzt man in die Gleichung:

$$-i = \frac{1}{+i}$$

für i eine andere Buchstabengrösse, z. B. x ein, so erhält man:

$$-x = \frac{1}{+x}$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit $(+x)$, so folgt:

$$(-x)\cdot(+x) = \left(\frac{1}{+x}\right)\cdot(+x) \quad \text{(s. Erkl. 16)}$$

oder:

$$-x^2 = +1 \quad \text{(siehe Erkl. 17 u. 18a)}$$

Multipliziert man die ganze Gleichung mit (-1), so erhält man:

$$(-x^2)\cdot(-1) = (+1)\cdot(-1)$$

oder:

$$+x^2 = -1$$

Zieht man schliesslich noch aus beiden Seiten der letzten Gleichung die Quadratwurzel, so ergibt sich:

$$\sqrt{+x^2} = \sqrt{-1}$$

d. i.:

$$x = i$$

Es gibt also keine andere Zahl als i, welche die behauptete Eigentümlichkeit besitzt.

Erkl. 15. Zwei Zahlen heissen „reciprok“, wenn ihr Produkt $= 1$ ist. Es ist z. B. a das Reciproke von $\frac{1}{a}$, weil $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ist.

Das Wort „reciprok“ (lat.) bedeutet „gegenseitig“, „wechselseitig“, auch „umgekehrt“.

Erkl. 16. Ein Satz aus der Lehre von den Gleichungen lautet:

„Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man mit beiden Seiten derselben die gleiche Rechnung vornimmt, z. B. beide Seiten mit derselben Zahl multipliziert, beide Seiten zur gleichen Potenz erhebt, aus beiden Seiten die gleiche Wurzel zieht.“

Erkl. 17. Wird ein Bruch mit seinem Nenner multipliziert, so erhält man seinen Zähler.

Erkl. 18. Der Bruch zweier Zahlen ist negativ, wenn Zähler und Nenner ungleiche Vorzeichen haben.

Erkl. 18a. Zwei Zahlen mit gleichen Vorzeichen geben ein positives, mit ungleichen ein negatives Produkt.

---

b) $(+i)\cdot(-i) = +1$

in Worten:

„Das Produkt aus der positiven und der negativen imaginären Einheit ist gleich $+1$.“

Beweis. Es ist:

$$(+i)\cdot(-i) = (+i)\cdot\left(\frac{1}{+i}\right)$$

[nach Teil a) dieser Antwort]

oder:

$$(+i)\cdot(-i) = +1 \quad \text{(nach Erkl. 17)}$$

---

c) $(+i)^2 = -1$ und $(-i)^2 = -1$

in Worten:

„Das Quadrat der imaginären Einheit, sowohl der positiven als auch der negativen, ist gleich -1.“

Beweis. Es war:

$$+i = +\sqrt{-1} \text{ und } -i = -\sqrt{-1}$$

(siehe Antwort auf Frage 3)

Man erhält demnach:

$$(+i)^2 = (+\sqrt{-1})^2 = +(-1) = -1$$
$$(-i)^2 = (-\sqrt{-1})^2 = +(-1) = -1$$

(siehe Erkl. 18a und 7,1)

oder:

$$(-i)^2 = (-i)\cdot(-i) = \frac{1}{+i}\cdot\frac{1}{+i}$$

$$[\text{nach Teil a)}] = \frac{1}{(+i)^2} = \frac{1}{-1}$$

(nach vorstehend. Beweis) $= -1$ (s. Erkl. 18)

Erkl. 19. Jede Grösse, durch sie selbst geteilt, gibt $+1$.

Erkl. 20. Ist das Produkt zweier Faktoren gleich dem zweier anderen, so bilden die Faktoren des einen Produktes die äusseren, die des anderen die inneren Glieder einer Proportion.

Hieraus ergibt sich, wenn man die Zahl -1 von der rechten Seite der Gleichung auf die linke nimmt:

d) $(\pm i)^2 + 1 = 0$

in Worten:

„Das Quadrat der positiven und der negativen imaginären Einheit, vermehrt um $+1$, gibt Null.“

Erkl. 20a. Ein Satz aus der Proportionenlehre lautet:

„In jeder Proportion ist das Produkt der äusseren Glieder gleich dem der inneren.“

Und aus derselben Gleichung:

$$(\pm i)^2 = -1$$

folgt noch weiter:

$$(+i)\cdot(+i) = (+1)\cdot(-1)$$

und

$$(-i)\cdot(-i) = (+1)\cdot(-1)$$

oder:

$$\text{e)}\ \begin{cases}(+1):(+i) = (+i):(-1)\\(+1):(-i) = (-i):(-1)\end{cases}$$

(nach Erkl. 20)

in Worten:

„Die imaginäre Einheit (sowohl die positive, als auch die negative) ist die mittlere Proportionale von $+1$ und -1.“ (Siehe Erkl. 21.)

Erkl. 21. Sind die inneren Glieder (das zweite und dritte Glied) einer Proportion gleich, so nennt man letztere stetig und jedes der beiden inneren Glieder die mittlere Proportionale.

Frage 5. Mit Hilfe welcher Formeln lassen sich die Potenzen der imaginären Einheit berechnen und welche Beziehungen finden zwischen diesen Potenzen statt?

Antwort. Bezeichnet n irgend eine reelle, positive oder negative Zahl (einschliesslich Null), so findet statt:

1) $i^{4n} = +1$
2) $i^{4n+1} = +i$
3) $i^{4n+2} = -1$
4) $i^{4n+3} = -i$

Die Richtigkeit vorstehender Formeln lässt sich am einfachsten durch direkte Berechnung der ersten Potenzen von i nachweisen.

Erkl. 22. Ein Satz aus der Potenzlehre lautet:

„Die nullte Potenz einer jeden Zahl ist gleich $+1$, die erste Potenz die Zahl selbst."

In Zeichen:

$$(\pm a)^0 = +1$$
$$(+a)^1 = +a\,; \qquad (-a)^1 = -a$$

Erkl. 23. Ein Satz der Potenzlehre lautet:

„Eine Potenz, deren Exponent eine Summe darstellt, ist gleich dem Produkte von Potenzen, deren Grundzahlen gleich der Basis der gegebenen Potenz und deren Exponenten gleich den Summanden des gegebenen Exponenten sind."

In Zeichen:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

Umgekehrt ist auch:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

In Worten:

„Potenzen von derselben Grundzahl werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert."

Erkl. 24. Ein Satz der Potenzlehre lautet:

„Eine Potenz, deren Exponent eine Differenz darstellt, ist gleich einem Bruche, dessen Zähler eine Potenz ist mit der Basis der gegebenen Potenz als Grundzahl und dem Minuendus des gegebenen Exponenten als Exponenten, und dessen Nenner eine Potenz ist mit der Basis der gegebenen Potenz als Grundzahl und dem Subtrahendus des gegebenen Exponenten als Exponenten."

In Zeichen:

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

Umgekehrt ist auch:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

In Worten:

„Potenzen von derselben Grundzahl werden dividiert, indem man den Exponenten des Divisors von dem des Dividendus subtrahiert."

Wird $m = n$, so erhält man:

$$a^{m-n} = a^{n-n} = a^0$$

Es ist also:

$$a^0 = \frac{a^n}{a^n} = +1 \quad \text{(vgl. Erkl. 22)}$$

Für die Pluspotenzen (s. Erkl. 24) erhält man:

a) wenn $n = 0$ ist:

$i^{4n} = i^{4\cdot 0} = i^0 = +1$ (siehe Erkl. 22 u. 24)

$i^{4n+1} = i^{4\cdot 0+1} = i^1 = i$ (siehe Erkl. 22)

$i^{4n+2} = i^{4\cdot 0+2} = i^2 = -1$ [nach Antwort c) auf Frage 4]

$i^{4n+3} = i^{4\cdot 0+3} = i^3 = i^1 \cdot i^2$ (nach Erkl. 23) $= i\cdot(-1) = -i$

b) wenn $n = 1$ ist:

$i^{4n} = i^{4\cdot 1} = i^4 = i^2 \cdot i^2$ (nach Erkl. 23) $= (-1)\cdot(-1) = +1$

$i^{4n+1} = i^{4+1} = i^5 = i^2 \cdot i^3 = (-1)\cdot(-i) = +i$

$i^{4n+2} = i^{4+2} = i^6 = i^3 \cdot i^3 = (-i)\cdot(-i) = \left(\frac{1}{+i}\right)\cdot\left(\frac{1}{+i}\right)$ [nach Antwort a) auf Frage 4] $= \frac{1}{(+i)^2} = \frac{1}{-1} = -1$

$i^{4n+3} = i^{4+3} = i^7 = i^3 \cdot i^4 = (-i)\cdot(+1) = -i$

und so fort.

Für die Minuspotenzen (s. Erkl. 24) ergibt sich:

a) wenn $n = -1$ ist:

$i^{4n} = i^{4\cdot(-1)} = i^{-4} = \frac{1}{i^4}$ (nach Erkl. 24) $= \frac{1}{+1} = +1$

$i^{4n+1} = i^{4\cdot(-1)+1} = i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = -\frac{1}{i}$ (siehe Erkl. 18) $= -(-i)$ [nach Antwort a) auf Frage 4] $= +i$

$i^{4n+2} = i^{4\cdot(-1)+2} = i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$

$i^{4n+3} = i^{4\cdot(-1)+3} = i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$

b) wenn $n = -2$ ist:

$i^{4n} = i^{4\cdot(-2)} = i^{-8} = \frac{1}{i^8}$ (nach Erkl. 24) $= \frac{1}{i^4}\cdot\frac{1}{i^4}$ (nach Erkl. 23) $= \frac{1}{(+1)}\cdot\frac{1}{(+1)} = +1$

$i^{4n+1} = i^{4\cdot(-2)+1} = i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{1}{-i} = -\frac{1}{i} = -(-i) = +i$

Wird $m = 0$, so erhält man:

$$a^{m-n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

Es ist also:

$$a^{-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

In Worten:

„Die Minuspotenz (d. h. die Potenz mit negativem Exponenten) ist das Umgekehrte der Pluspotenz (d. h. der Potenz mit positivem Exponenten).

(Siehe Kleyers „Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln.")

$$i^{4n+2} = i^{4\cdot(-2)+2} = i^{-6}$$
$$= \frac{1}{i^6} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4\cdot(-2)+3} = i^{-5}$$
$$= \frac{1}{i^5} = \frac{1}{+i} = -i$$

und so fort.

Hieraus ergibt sich folgender Satz:

„Die Potenzen der imaginären Einheit — sowohl die mit positiven, als auch die mit negativen Exponenten — kehren stets weder."

Die Periode ist:

$$+1; \quad +i; \quad -1; \quad -i$$

Andere Werte, als die vorstehenden, können sich bei keiner Potenz von i ergeben.

---

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 5. Man soll nachstehende Ausdrücke auf die einfachste Form bringen:

a) $(\sqrt{-1})^{24}$

b) i^{89}

c) $(-\sqrt{-1})^{126}$

Auflösungen.

a) Der Exponent 24 lässt sich durch 4 ohne Rest teilen, denn $24 = 4\cdot 6$. Man erhält also für:

$$(\sqrt{-1})^{24} = i^{4\cdot 6}$$

oder allgemein:

$$= i^{4\cdot n}$$

Nach Formel 1) (Frage 5) ist:

$$i^{4n} = +1$$

folglich ist:

$$(\sqrt{-1})^{24} = +1$$

b) Der Exponent 89 gibt, durch 4 geteilt, den Quotient 22 und den Rest $+1$. Man erhält demnach für:

$$i^{89} = i^{4\cdot 22+1}$$

oder allgemein:

$$= i^{4n+1}$$

Nach Formel 2) (Frage 5) ist:

$$i^{4n+1} = +i$$

folglich gibt:

$$i^{89} = +i$$

c) Der Exponent 126, durch 4 geteilt, gibt den Quotient 31 und den Rest $+2$. Man kann also schreiben für:

$$(-\sqrt{-1})^{126} = (-\sqrt{-1})^{4\cdot 31+2}$$

oder allgemein:

$$(-i)^{126} = (-i)^{4n+2}$$

Nach Formel 3) (Frage 5) ist aber:

$$i^{4n+2} = -1$$

folglich ist:

$$(-i)^{126} = -1$$

denn das Resultat ändert sich nicht, wenn i negativ ist, weil der Potenzexponent eine gerade Zahl ist (siehe Erkl. 25).

Erkl. 25. Ein Satz aus der Potenzlehre lautet:

„Alle geraden Potenzen einer negativen Zahl sind positiv, alle ungeraden negativ.“

---

d) $(-i)^{163}$

d) Der Exponent 163 lässt sich zerlegen in: $4 \cdot 40 + 3$. Folglich ist:

$$(-i)^{163} = (-i)^{4 \cdot 40 + 3}$$

oder allgemein:

$$= (-i)^{4n+3}$$

Nach Formel 4) (Frage 5) gibt:

$$i^{4n+3} = -i$$

Da die Grundzahl der gegebenen Potenz negativ und der Exponent eine ungerade Zahl ist, so erhält man (nach Erkl. 25) für:

$$(-i)^{163} = -(-i) = +i$$

---

e) $(\sqrt{-1})^{-20}$

e) Der Exponent -20 lässt sich zerlegen in: $-4 \cdot 5$. Man erhält also für:

$$(\sqrt{-1})^{-20} = i^{-4 \cdot 5}$$

oder allgemein:

$$= i^{-4n}$$

Nun ist:

$$i^{-4n} = \frac{1}{i^{4n}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

und

$$i^{4n} = +1 \quad \text{[nach Formel 1), Frage 5]}$$

folglich gibt:

$$(\sqrt{-1})^{-20} = \frac{1}{+1} = +1$$

---

f) $(-i)^{-39}$

f) Der Exponent 39 gibt, durch 4 geteilt, zum Quotienten 9 und zum Rest $+3$. Man erhält hiernach für:

$$(-i)^{-39} = (-i)^{-(4 \cdot 9 + 3)}$$

oder allgemein:

$$= (-i)^{-(4n+3)}$$

$$= \frac{1}{(-i)^{4n+3}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

Nun ist:

$$i^{4n+3} = -i \quad \text{[nach Formel 4), Frage 5]}$$

und

$$(-i)^{4n+3} = -(-i) \quad \text{(nach Erkl. 25)}$$

folglich ist:

$$(-i)^{-39} = \frac{1}{-(-i)} = \frac{1}{+i} = -i$$

[nach Antwort a) auf Frage 4]

---

g) $(\sqrt{-1})^{-30}$

g) Der Exponent 30 gibt, durch 4 geteilt, zum Quotienten 7 und zum Rest $+2$. Man erhält demnach für:

$$(\sqrt{-1})^{-30} = (\sqrt{-1})^{-(4 \cdot 7 + 2)}$$

oder allgemein:

$$= (\sqrt{-1})^{(-4n+2)} = \frac{1}{i^{4n+2}}$$

Nun ist:

$i^{4n+2} = -1$ [nach Formel 8), Frage 5]

folglich:

$$(\sqrt{-1})^{-30} = \frac{1}{-1} = -1$$

---

h) i^{-97}

h) Dividiert man den Exponenten 97 durch 4, so erhält man 24 zum Quotienten und $+1$ zum Rest. Man kann also schreiben für:

$$i^{-97} = i^{-(4 \cdot 24 + 1)}$$

oder allgemein:

$$= i^{-(4n+1)} = \frac{1}{i^{4n+1}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

Nach Formel 2) (Frage 5) ist aber:

$$i^{4n+1} = +i$$

folglich gibt:

$$i^{-97} = \frac{1}{+i} = -i$$

[nach Antwort a) auf Frage 4]

---

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 6. Man soll nachstehende Ausdrücke auf die einfachste Form bringen:

a) $(+\sqrt{-1})^{16}$

b) i^{45}

c) $(-\sqrt{-1})^{62}$

d) $(-i)^{87}$

e) i^{-12}

f) $(-i)^{-17}$

g) $(+\sqrt{-1})^{-54}$

h) $(-\sqrt{-1})^{-103}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, a).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, b).

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, c).

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, d).

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, e).

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, h).

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, g).

h) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, f).

---

3) Ueber das Rechnen mit imaginären Zahlen.

Anmerkung 4. Das Symbol $\sqrt{-a}$ stellt sowohl eine positive, als auch eine negative imaginäre Zahl dar (siehe Antwort auf Frage 2 und Erkl. 10). Um das Verständnis der nachfolgenden Gesetze zu erleichtern und die Rechnung einfacher zu gestalten, soll im Folgenden immer nur ein Wert Berücksichtigung finden und zwar, wenn vor der imaginären Zahl kein Vorzeichen oder das Zeichen $+$ steht, nur der positive, und wenn vor derselben das Zeichen $-$ steht, nur der negative Wert.

a) Ueber das Addieren und Subtrahieren.

Frage 6. Wie werden imaginäre Zahlen addiert?

Erkl. 26. Wenn die Glieder einer Summe einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, so kann man jedes dieser Glieder durch diesen Faktor dividieren, die Quotienten algebraisch addieren, sie in eine Klammer setzen und letztere mit dem gemeinschaftlichen Faktor multiplizieren; z. B.:

$$81a^4 - 54a^2 = \left(\frac{81a^4}{27a^2} - \frac{54a^2}{27a^2}\right) \cdot 27a^2$$
$$= (3a^2 - 2) \cdot 27a^2$$

denn umgekehrt gibt:

$$(3a^2 - 2) \cdot 27a^2 = 81a^4 - 54a^2$$

Erkl. 27. Wenn man die Zweideutigkeit der Wurzeln berücksichtigt, so erhält man für $\sqrt{-a} + \sqrt{-b}$ nicht weniger als vier verschiedene Lösungen, nämlich wenn der aus $\sqrt{a}$ resultierende absolute Wert mit r und der aus $\sqrt{b}$ resultierende mit r_1 bezeichnet wird, die folgenden:

1) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b} = [(+r)+(+r_1)] \cdot \sqrt{-1}$
$= (+r+r_1) \cdot i$

2) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b} = [(-r)+(+r_1)] \cdot \sqrt{-1}$
$= (-r+r_1) \cdot i$

3) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b} = [(+r)+(-r_1)] \cdot \sqrt{-1}$
$= (+r-r_1) \cdot i$

4) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b} = [(-r)+(-r_1)] \cdot \sqrt{-1}$
$= (-r-r_1) \cdot i = -(r+r_1) \cdot i$

(Siehe die beiden folgenden Erkl. 28 u. 28a).

Erkl. 28. Der Satz von der Auflösung der Klammern lautet:

„Gleiche Zeichen vor und in der Klammer geben +, ungleiche —."

Erkl. 28a. Es ist üblich, das Rechnungszeichen der Summe (+) fortzulassen und die Glieder nur mit ihren Vorzeichen aneinanderzureihen, also statt: $(+\sqrt{a}) + (-\sqrt{b})$ zu schreiben: $+\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Erkl. 29. Sind mehrere imaginäre Zahlen positiv und mehrere negativ, so hat man zuerst alle positiven, dann alle negativen Zahlen für sich zu addieren und schliesslich die beiden Summen nach der in der Antwort auf Frage 6 gegebenen Regel zu vereinigen.

Antwort. Imaginäre Zahlen werden addiert, indem man die algebraische Summe ihrer reellen Faktoren mit der imaginären Einheit multipliziert.

Behauptung.

$$\sqrt{-a} + \sqrt{-b} = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot \sqrt{-1}$$

Beweis. Es ist:

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}\\ \text{und}\quad&\sqrt{-b} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}\end{aligned}\right\} \text{(nach Antwort auf Frage 2)}$$

folglich ist:

$$\sqrt{-a} + \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot \sqrt{-1}$$

(nach Erkl. 26)

Frage 7. Wie wird eine imaginäre Zahl von einer andern subtrahiert?

Antwort. Eine imaginäre Zahl wird von einer andern subtrahiert, indem man

sie zu letzterer mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

In Zeichen:

$$\sqrt{-a} - (+\sqrt{-b}) = \sqrt{-a} - \sqrt{-b}$$

(nach Erkl. 28)

oder: $= (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot \sqrt{-1}$

(nach Erkl. 26)

und

$$\sqrt{-a} - (-\sqrt{-b}) = \sqrt{-a} + \sqrt{-b}$$

oder: $= (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot \sqrt{-1}$

(siehe Erkl. 30)

Erkl. 30. Die für das Rechnen mit reellen Zahlen aufgestellten Gesetze lassen sich auch auf die imaginären Zahlen anwenden, solange hierdurch keine Widersprüche entstehen. Da die imaginären Zahlen aus der imaginären Einheit in gleicher Weise entstehen wie die reellen Zahlen aus der reellen Einheit, so lassen sich auch die imaginären Zahlen zu einander addieren und von einander subtrahieren.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 7. Man soll die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form bringen:

a) $(+\sqrt{-256}) + (+\sqrt{-729}) + (-\sqrt{-121}) + (-\sqrt{-196})$

Auflösung. a) Man erhält:

$$(+\sqrt{-256}) + (+\sqrt{-729}) + (-\sqrt{-121}) + (-\sqrt{-196}) = (+\sqrt{256} \cdot \sqrt{-1}) + (\sqrt{729} \cdot \sqrt{-1}) + (-\sqrt{121} \cdot \sqrt{-1}) + (-\sqrt{196} \cdot \sqrt{-1})$$

$$= (+16i) + (+27i) + (-11i) + (-14i)$$

$$= (16 + 27 - 11 - 14)i = +18i$$

---

b) $\left(+\sqrt{-\frac{16a^4}{25b^2}}\right) - \left(-\sqrt{-\frac{36a^4}{49b^2}}\right)$

b) $\left(+\sqrt{-\frac{16a^4}{25b^2}}\right) - \left(-\sqrt{-\frac{36a^4}{49b^2}}\right) = \left(+\sqrt{\frac{16a^4}{25b^2}} \cdot \sqrt{-1}\right) - \left(-\sqrt{\frac{36a^4}{49b^2}} \cdot \sqrt{-1}\right) =$

$$+\frac{4a^2}{5b} \cdot i + \frac{6a^2}{7b} \cdot i \quad \text{(nach Erkl. 31)}$$

oder:

$$= \frac{58a^2i}{35b} \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

---

c) $2 \cdot \sqrt{-96} - 3 \cdot \sqrt{-24} + 5 \cdot \sqrt{-216} - 7 \cdot \sqrt{-54}$

Erkl. 31. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Die $n$te Wurzel aus einem Bruche ist gleich dem Quotienten der $n$ten Wurzel des Zählers durch die $n$te Wurzel des Nenners."

In Zeichen:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

c) Es ist:

$$2 \cdot \sqrt{-96} - 3 \cdot \sqrt{-24} + 5 \cdot \sqrt{-216} - 7 \cdot \sqrt{-54} = 2 \cdot \sqrt{96} \cdot \sqrt{-1} - 3 \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{-1} + 5 \cdot \sqrt{216} \cdot \sqrt{-1} - 7 \cdot \sqrt{54} \cdot \sqrt{-1}$$

oder, indem man die Radikanden der reellen Wurzeln soweit in Faktoren zerlegt, dass sich wenigstens teilweise die Wurzel ziehen lässt, und für $\sqrt{-1} = i$ setzt:

$$= 2 \cdot i \cdot \sqrt{16 \cdot 6} - 3 \cdot i \cdot \sqrt{4 \cdot 6} + 5 \cdot i \cdot \sqrt{36 \cdot 6} - 7 \cdot i \cdot \sqrt{9 \cdot 6}$$

Umgekehrt gibt:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

d) $\sqrt{-ab^2} - 2 \cdot \sqrt{-a} - 2a \cdot \sqrt{-\frac{b^2}{a}} + b \cdot \sqrt{-a}$

Erkl. 32. Um Faktoren, die vor einer Wurzel stehen, unter dieselbe zu bringen, muss man sie auf den Grad potenzieren, welchen die Wurzel besitzt.

In Zeichen:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

oder nach Erkl. 9:

$$= 2 \cdot i \cdot 4 \cdot \sqrt{6} - 3 \cdot i \cdot 2 \cdot \sqrt{6} + 5 \cdot i \cdot 6 \cdot \sqrt{6} - 7 \cdot i \cdot 3 \cdot \sqrt{6} = 8i\sqrt{6} - 6i\sqrt{6} + 30i\sqrt{6} - 21i\sqrt{6} = +11i\sqrt{6}$$

d) Man erhält zunächst für:

$$\sqrt{-ab^2} - 2 \cdot \sqrt{-a} - 2a \cdot \sqrt{-\frac{b^2}{a}} + b \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{-1} - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} - 2a \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a}}\sqrt{-1} + b \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$$

und, wenn man soweit als möglich radiziert und den gemeinsamen Faktor $\sqrt{-1} = i$ absondert:

$$= \left(b \cdot \sqrt{a} - 2 \cdot \sqrt{a} - 2ab \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} + b \cdot \sqrt{a}\right) \cdot i$$

oder, da: $a \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{\frac{a^2}{a}} = \sqrt{a}$ ist (nach Erkl. 32):

$$= (b \cdot \sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 2b\sqrt{a} + b\sqrt{a}) \cdot i$$
$$= (b - 2 - 2b + b) i \sqrt{a} \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$
$$= -2i\sqrt{a}$$

e) $5 \cdot \sqrt{-\frac{4}{5}} + 6 \cdot \sqrt{-\frac{5}{4}} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}$

e) Zunächst gibt:

$$5 \cdot \sqrt{-\frac{4}{5}} + 6 \cdot \sqrt{-\frac{5}{4}} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{-1} + 6 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{-1} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}$$

oder, wenn man soweit als möglich radiziert und den gemeinschaftlichen Faktor $\sqrt{-1} = i$ absondert:

$$= \left(5 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot i - 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \quad \text{(nach Erkl. 31)}$$

Nun ist:

$$5 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{5^2}{5}} = \sqrt{5}$$

und

$$10 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{5^2}{5}} = 2\sqrt{5}$$

(nach Erkl. 32)

Folglich erhält man für:

$$\left(5 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot i - 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 8 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{5} = (2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}) \cdot i - 4\sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{5}$$

oder $= 5i\sqrt{5}$.

f) $40 \cdot \sqrt{-\frac{0,3 a^3 b^2}{0,2 c^4 d^5}} - \frac{150 a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-\frac{2,7 a}{5 d^3}} + \frac{7 a d}{c} \cdot \sqrt{-\frac{29,4 a b^2}{0,4 c^2 d^7}}$

f) Man erhält für:

$$40 \cdot \sqrt{-\frac{0,3 a^3 b^2}{0,2 c^4 d^5}} - \frac{150 a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-\frac{2,7 a}{5 d^3}} + \frac{7 a d}{c} \cdot \sqrt{-\frac{29,4 a b^2}{0,4 c^2 d^7}} = 40 \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{0,3 a^3 b^2}{0,2 c^4 d^5}} - \frac{150 a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{2,7 a}{5 d^3}} + \frac{7 a d}{c} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{29,4 a b^2}{0,4 c^2 d^7}}$$

oder, wenn man die Produkte und Potenzen soweit in Faktoren zerlegt, dass wenigstens teilweise die Wurzel gezogen werden kann, und nach Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{-1} = i$:

$$= \left(40 \cdot \sqrt{\frac{0,3 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^2}{0,2 \cdot c^4 \cdot d^4 \cdot d}} - \frac{150 a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 0,3 \cdot a}{25 \cdot 0,2 \cdot d^2 \cdot d}} + \frac{7 a d}{c} \cdot \sqrt{\frac{49 \cdot 0,3 \cdot a \cdot b^2}{0,2 \cdot c^2 \cdot d^6 \cdot d}}\right) \cdot i$$

oder, wenn man soweit als möglich radiziert:

$$= \left(\frac{40 a b}{c^2 d^2} \cdot \sqrt{\frac{0,3 a}{0,2 d}} - \frac{150 a b}{c^2 d} \cdot \frac{3}{5 d} \sqrt{\frac{0,3 a}{0,2 d}} + \frac{7 a d}{c} \cdot \frac{7 b}{c d^3} \sqrt{\frac{0,3 a}{0,2 d}}\right) \cdot i$$

oder nach dem Kürzen der Brüche und nach Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{\frac{0,3 a}{0,2 d}}$:

$$= \left(\frac{40 a b}{c^2 d^2} - \frac{90 a b}{c^2 d^2} + \frac{49 a b}{c^2 d^2}\right) \cdot i \cdot \sqrt{\frac{0,3 a}{0,2 d}} = -\frac{a b i}{c^2 d^2} \sqrt{\frac{0,3 a}{0,2 d}}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 8. Nachstehende Ausdrücke sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(-\sqrt{-324}) + (+\sqrt{-144}) + (-\sqrt{-289}) + (+\sqrt{-441})$

b) $\left(-\sqrt{-\frac{64 x^4 y^2}{81 z^6}}\right) - \left(+\frac{x y}{z} \cdot \sqrt{-\frac{100 x^2}{169 z^4}}\right)$

c) $3 \cdot \sqrt{-20} + 4 \cdot \sqrt{-180} - 5 \cdot \sqrt{-125} + 6 \cdot \sqrt{-405}$

d) $+\sqrt{-\frac{a^3}{b^5}} - \frac{a}{b} \cdot \sqrt{-\frac{a}{b^3}} - \frac{2}{3 a} \cdot \sqrt{-\frac{9 a^5}{b^3}} + b^3 \cdot \sqrt{-\frac{25 a^3}{9 b^9}}$

e) $3 \cdot \sqrt{-\frac{7}{9}} - 2 \cdot \sqrt{-28} + 7 \cdot \sqrt{-\frac{1}{7}} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{-63}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, a).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, b) unter Berücksichtigung von Erkl. 28.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, c).

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, d) und 7, f) unter Berücksichtigung von Erkl. 32.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, e) unter Berücksichtigung von Erkl. 32.

f) $y^4 \cdot \sqrt{-\frac{x^6 y}{z^3}} - x \cdot \sqrt{-\frac{x y^5}{z^6}} - \frac{x^8}{z} \cdot \sqrt{-\frac{y^9}{z}} + y^2 z \cdot \sqrt{-\frac{x^3 y}{z^7}} + \frac{x}{y} \cdot \sqrt{-\frac{y^8}{x^5}}$

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, f).

---

b) Ueber das Multiplizieren.

Frage 8. Wie werden zwei imaginäre Quadratwurzeln miteinander **multipliziert?**

Erkl. 33. Die Mathematiker zu Ende des vorigen Jahrhunderts waren darüber im Zweifel, was man unter dem Produkte zweier imaginären Quadratwurzeln zu verstehen habe. Ein Teil von ihnen (z. B. auch Euler) war der Ansicht, dass dieses Produkt gleich einer reellen Grösse, nämlich:

$$= -\sqrt{a \cdot b}$$

wäre; die übrigen (darunter z. B. der englische Mathematiker Emerson) glaubten für:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-a \cdot b}$$

setzen zu müssen, weil ein Produkt aus unmöglichen Grössen keine mögliche Grösse geben könnte. (Vergl. Hutton, Mathematical dictionary, 1796.)

Erkl. 33 a. Das Produkt zweier imaginären Zahlen ist gleich dem Produkt der entsprechenden reellen Zahlen. Letzteres Produkt ist positiv, wenn die imaginären Faktoren ungleiche, negativ, wenn sie gleiche Vorzeichen besitzen.

Man erhält also:

$$(+ai) \cdot (+bi) = +abi^2 = -ab$$

und

$$(+ai) \cdot (-bi) = -abi^2 = +ab$$

Antwort. Das Produkt zweier imaginären Quadratwurzeln ist reell und gleich der negativen Quadratwurzel aus dem Produkte der Radikanden.

Behauptung.

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$$

Beweis. Es ist:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{-1})^2$$

Nun ist:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

(nach Antwort auf Frage 4, c)

folglich ist:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (-1) = -\sqrt{a \cdot b}$$

(vergl. Erkl. 33 a)

Frage 9. Was erhält man für:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}\,?$$

Erkl. 34. Eine Summe von gleichen imaginären Summanden ist gleich einem Produkte aus einer imaginären und einer reellen Zahl.

Man erhält für:

$$(+ai) \cdot b = +ai + ai + ai + \cdots$$
$$= +(a + a + a \cdots) i = (ab) i$$

und für:

$$(-ai) \cdot b = (-ai) + (-ai) + \cdots$$
$$= -(a + a + a \cdots) i = -(ab) i$$

Eine Multiplikation mit $-b$ hat dieselbe Bedeutung wie eine Multiplikation mit b und eine Umkehrung des Vorzeichens des Resultats. Demnach ist:

$$(+ai) \cdot (-b) = -(ab) i$$

und

$$(-ai) \cdot (-b) = +(ab) i$$

Antwort. Das Produkt zweier Quadratwurzeln, von welchen die eine imaginär ist, ist imaginär und gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der Radikanden.

Behauptung.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-a \cdot b}$$

Beweis. Es ist:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{a \cdot b \cdot (-1)} = \sqrt{-a \cdot b}$$

(oder $= i\sqrt{ab}$) (siehe Erkl. 34).

Frage 10. Was erhält man für:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a}$?

Antwort. Nach vorstehender Antwort ist:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-a \cdot b}$

Setzt man für $b = a$, so erhält man:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{-a \cdot a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1} = ai$

Frage 11. Was erhält man für:

$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a}$?

Antwort. Nach der Antwort auf Frage 8 ist:

$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -\sqrt{a \cdot b}$

Setzt man für $b = a$, so erhält man

$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -\sqrt{a \cdot a} = -\sqrt{a^2} = -a$

In Worten:

„Das Produkt zweier imaginären Quadratwurzeln mit gleichen Radikanden ist gleich dem negativen Radikandus."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 9. Nachstehende Ausdrücke sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b})$

b) $(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a})$

c) $-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b})$

d) $(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a})$

Auflösung. a) Es ist:

$$(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b}) = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}) = -\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{-1})^2 = -\sqrt{ab} \cdot (-1) = +\sqrt{ab}$$

b) Wie vorstehend gezeigt wurde, ist:

$$(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b}) = +\sqrt{ab}$$

Setzt man für $b = a$, so erhält man:

$$(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a}) = +\sqrt{a \cdot a} = +\sqrt{a^2} = +a$$

c) Es ist:

$$(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b}) = (-\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}) = +\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{-1})^2 = +\sqrt{ab} \cdot (-1) = -\sqrt{ab}$$

d) Nach vorstehender Lösung ist:

$$(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b}) = -\sqrt{ab}$$

Setzt man für $b = a$, so ergibt sich:

$$(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a}) = -\sqrt{aa} = -\sqrt{a^2} = -a$$

e) $a \cdot \sqrt{-a^5 b^3} \cdot \sqrt{-a b^5}$

e) **Man erhält für:**

$$a \cdot \sqrt{-a^5 b^3} \cdot \sqrt{-a b^5} =$$
$$a \cdot \sqrt{a^5 b^3} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a b^5} \cdot \sqrt{-1}$$

oder nach Erkl. 9:

$$= a \cdot \sqrt{a^6 b^8} \cdot (\sqrt{-1})^2$$

Nun ist:

$$\sqrt{a^6 b^8} = a^3 b^4 \text{ und } (\sqrt{-1})^2 = -1$$

folglich ist:

$$a \cdot \sqrt{-a^5 b^3} \cdot \sqrt{-a b^5} = a \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot (-1)$$
$$= -a^4 b^4$$

---

f) $-\left(\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}}\right) + \left(\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-4\frac{4}{9}}\right) - \left(\sqrt{-3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-18\frac{2}{7}}\right)$

f) Nach der Antwort auf Frage 8 gibt:

$$\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}} = -\sqrt{7 \cdot 5\frac{1}{7}}$$
$$= -\sqrt{36} = -6$$

also:

$$-\left(\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}}\right) = -(-6) = +6$$

ferner:

$$+\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-4\frac{4}{9}}$$
$$= +\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= +\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4\frac{4}{9}} \cdot (\sqrt{-1})^4 = +\sqrt{400} \cdot (+1) = +20$$

(vergleiche Anmerkung 3)

endlich:

$$-\left(\sqrt{-3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-18\frac{2}{7}}\right) = -\left(-\sqrt{\frac{7}{2} \cdot \frac{128}{7}}\right)$$
$$= -(-\sqrt{64}) = +8$$

Demnach erhält man für:

$$-\left(\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}}\right) + \left(\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-4\frac{4}{9}}\right) - \left(\sqrt{-3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-18\frac{2}{7}}\right) = +6 + 20 + 8 = +34$$

---

g) $\sqrt{-\frac{a^3}{b^2}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b^3}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{a}} - \sqrt{-\frac{b^5}{a^7}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{-\frac{a^9}{b^8}}$

g) Der Minuendus:

$$\sqrt{-\frac{a^3}{b^2}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b^3}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{a}}$$

gibt nach Absonderung der imaginären Einheit und Vereinigung der reellen Wurzeln:

$$= \sqrt{\frac{a^3 \cdot a^2 \cdot b}{b^2 \cdot b^3 \cdot a}} \cdot (\sqrt{-1})^3 = \sqrt{\frac{a^4}{b^4}} \cdot (-i) = -\frac{a^2 i}{b^2}$$

der Subtrahendus:

$$= \sqrt{\frac{b^5 \cdot a^2 \cdot a^9}{a^7 \cdot b \cdot b^8}} \cdot (\sqrt{-1})^3 = \sqrt{\frac{a^4}{b^4}} \cdot (-i) = -\frac{a^2 i}{b^2}$$

Folglich erhält man für:

$$\sqrt{-\frac{a^3}{b^2}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b^3}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{a}} - \sqrt{-\frac{b^5}{a^7}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{-\frac{a^9}{b^8}} = -\frac{a^2 i}{b^2} - \left(-\frac{a^2 i}{b^2}\right) = 0$$

---

h) $(2 \cdot \sqrt{-5} + 3 \cdot \sqrt{-6} - 4 \cdot \sqrt{-10} + 5 \cdot \sqrt{-15}) \cdot \sqrt{-30}$

h) Nach den Erkl. 18a und 35 gibt:

$$(2 \cdot \sqrt{-5} + 3 \cdot \sqrt{-6} - 4 \cdot \sqrt{-10} + 5 \cdot \sqrt{-15}) \cdot \sqrt{-30}$$
$$= 2 \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-30} + 3\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-30} - 4 \cdot \sqrt{-10} \cdot \sqrt{-30} + 5 \cdot \sqrt{-15} \cdot \sqrt{-30}$$

oder:

$$= 2 \cdot (-\sqrt{150}) + 3 \cdot (-\sqrt{180}) - 4 \cdot (-\sqrt{300}) + 5 \cdot (-\sqrt{450})$$

(nach der Antwort auf Frage 8)

oder nach Zerlegung der Radikanden in solche Faktoren, dass wenigstens teilweise die Wurzel gezogen werden kann:

$$= -2 \cdot \sqrt{25 \cdot 6} - 3 \cdot \sqrt{36 \cdot 5} + 4 \cdot \sqrt{100 \cdot 3} - 5 \cdot \sqrt{225 \cdot 2}$$
$$= -2 \cdot 5 \cdot \sqrt{6} - 3 \cdot 6 \cdot \sqrt{5} + 4 \cdot 10 \cdot \sqrt{3} - 5 \cdot 15 \cdot \sqrt{2} \text{ (nach Erkl. 9)}$$

d. i.:

$$= -10\sqrt{6} - 18\sqrt{5} + 40\sqrt{3} - 75\sqrt{2}$$

(siehe Erkl. 35a)

Erkl. 35. Eine mehrgliederige (Klammer-) Grösse wird mit einer eingliederigen multipliziert, indem man jedes Glied der Klammer mit letzterer multipliziert.

Erkl. 35a. Auf drei Dezimalstellen genau erhält man für:

$$-10\sqrt{6} - 18\sqrt{5} + 40\sqrt{3} - 75\sqrt{2}$$
$$= -10 \cdot 2{,}449 - 18 \cdot 2{,}236 + 40 \cdot 1{,}732 - 75 \cdot 1{,}414$$
$$= -24{,}49 - 40{,}248 + 69{,}28 - 106{,}05$$
$$= -101{,}508$$

---

i) $\left(3 \cdot \sqrt{-\frac{1}{5}} - 4 \cdot \sqrt{-\frac{1}{6}} + 5 \cdot \sqrt{-\frac{5}{6}} - 4\frac{1}{6} \cdot \sqrt{-\frac{6}{5}}\right) \cdot (-2 \cdot \sqrt{-30})$

i) Nach den Erkl. 18b und 35 ist:

$$\left(3 \cdot \sqrt{-\frac{1}{5}} - 4 \cdot \sqrt{-\frac{1}{6}} + 5 \cdot \sqrt{-\frac{5}{6}} - 4\frac{1}{6} \cdot \sqrt{-\frac{6}{5}}\right) \cdot (-2 \cdot \sqrt{-30})$$
$$= -6 \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{5} \cdot 30}\right) + 8 \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{6} \cdot 30}\right) - 10 \cdot \left(-\sqrt{\frac{5}{6} \cdot 30}\right) + 8\frac{1}{3} \cdot \left(-\sqrt{\frac{6}{5} \cdot 30}\right)$$
$$= +6 \cdot \sqrt{6} - 8 \cdot \sqrt{5} + 10 \cdot 5 - 8\frac{1}{3} \cdot 6$$
$$= +6 \cdot \sqrt{6} - 8 \cdot \sqrt{5} \text{ (siehe Erkl. 35b)}$$

Erkl. 35b. Auf drei Dezimalstellen genau erhält man für:

$$+6\sqrt{6} - 8\sqrt{5} = +6 \cdot 2{,}449 - 8 \cdot 2{,}236$$
$$= -3{,}194$$

---

k) $(\sqrt{-13} + \sqrt{-15}) \cdot (\sqrt{-39} - \sqrt{-45})$

k) Multipliziert man die erste Klammer zunächst nur mit dem ersten Gliede der zweiten (siehe Erkl. 36), so erhält man nach der Antwort auf Frage 8 und nach Erkl. 35:

$$(-13 + \sqrt{-15}) \cdot \sqrt{-39}$$
$$= -\sqrt{13 \cdot 39} - \sqrt{15 \cdot 39}$$
$$= -13\sqrt{3} - 3\sqrt{65} \text{ (s. Erkl. 36a)}$$

und wenn man die erste Klammer mit dem zweiten Gliede der zweiten Klammer multipliziert:

$$(\sqrt{-13} + \sqrt{-15}) \cdot (\cdot\ \sqrt{-45})$$
$$= -(-\sqrt{13 \cdot 45}) - (-\sqrt{15 \cdot 45})$$
$$= -(-3 \cdot \sqrt{65}) - (-15 \cdot \sqrt{3})$$
$$= +3\sqrt{65} + 15\sqrt{3} \text{ (s. Erkl. 36a)}$$

Erkl. 36. Zwei mehrgliederige (Klammer-) Grössen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Klammer mit jedem Gliede der anderen multipliziert und das Gleichnamige vereinigt.

Erkl. 36a. Es gibt:

$$\sqrt{13 \cdot 39} = \sqrt{13 \cdot 13 \cdot 3} = \sqrt{13^2 \cdot 3} = 13 \cdot \sqrt{3}$$

(nach Erkl. 9)

$$\sqrt{15 \cdot 39} = \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 3} = \sqrt{3^2 \cdot 65} = 3 \cdot \sqrt{65}$$
$$\sqrt{13 \cdot 45} = \sqrt{13 \cdot 9 \cdot 5} = 3 \cdot \sqrt{65}$$
$$\sqrt{15 \cdot 45} = \sqrt{15 \cdot 15 \cdot 3} = \sqrt{15^2 \cdot 3} = 15 \cdot \sqrt{3}$$

Folglich gibt:

$$(\sqrt{-13}+\sqrt{-15})\cdot(\sqrt{-39}-\sqrt{-45})$$
$$=-13\sqrt{3}-3\sqrt{65}+3\sqrt{65}+15\sqrt{3}$$
$$=+2\sqrt{3}$$

(oder angenähert $= +2\cdot 1{,}732 = 3{,}464$.)

---

l) $(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\sqrt{-ab}-\sqrt{-bc})$

Erkl. 87. Das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

Erkl. 87 a. Schneller gelangt man zum Resultat, wenn man den in Erkl. 87 aufgeführten Satz anwendet. Man erhält:

$$(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\overline{-ab}-\sqrt{-bc})$$
$$=(\sqrt{-ab})^2-(\sqrt{-bc})^2$$
$$=(-ab)-(-bc) \quad \text{(nach Erkl. 5)}$$
$$=-ab+bc=b(c-a)$$

l) Nach Erkl. 36 und Antwort auf Frage 8 erhält man:

$$(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\sqrt{-ab}-\sqrt{-bc})$$
$$=-\sqrt{ab\cdot ab}-\sqrt{bc\cdot ab}+\sqrt{ab\cdot bc}+\sqrt{bc\cdot bc}$$

oder:

$$=-\sqrt{a^2b^2}-\sqrt{ab^2c}+\sqrt{ab^2c}+\sqrt{b^2c^2}$$

oder:

$$=-ab+bc \quad \text{(vergl. Anmerkung 3)}$$
$$=b(c-a) \quad \text{(nach Erkl. 25)}$$

---

m) $\left(9\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}-8\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}+3\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\right)\cdot(-2\cdot\sqrt{-56}+3\cdot\sqrt{-224})$

m) Nach Erkl. 36 gibt:

$$\left(9\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}-8\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}+3\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\right)\cdot(-2\cdot\sqrt{-56}+3\cdot\sqrt{-224})$$

$$=-18\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{-56}+16\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}\cdot\sqrt{-56}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{-56}+$$
$$12\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\cdot\sqrt{-56}+27\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{-224}-24\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}\cdot\sqrt{-224}+$$
$$9\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{-224}-18\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\cdot\sqrt{-224}$$

$$=-18\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{7}\cdot 56}\right)+16\cdot\left(-\sqrt{\frac{7}{8}\cdot 56}\right)-6\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{7}\cdot 56}\right)+$$
$$12\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{28}\cdot 56}\right)+27\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{7}\cdot 224}\right)-24\cdot\left(-\sqrt{\frac{7}{8}\cdot 224}\right)+$$
$$9\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{7}\cdot 224}\right)-18\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{28}\cdot 224}\right) \quad \text{(nach Antwort auf Frage 8)}$$

$$=+18\cdot\sqrt{16}-16\cdot\sqrt{49}+6\cdot\sqrt{8}-$$
$$12\cdot\sqrt{2}-27\cdot\sqrt{64}+24\cdot\sqrt{196}-$$
$$9\cdot\sqrt{32}+18\cdot\sqrt{8}$$
$$=+18\cdot 4-16\cdot 7-27\cdot 8+24\cdot 14 \quad \text{(s. Erkl. 38)}$$
$$=+72-112-216+336$$
$$=+80$$

Erkl. 38. Man erhält für:

$$6\cdot\sqrt{8}=6\cdot\sqrt{4\cdot 2}=6\cdot 2\cdot\sqrt{2}=12\cdot\sqrt{2}$$

(nach Erkl. 9)

$$9\cdot\sqrt{32}=9\cdot\sqrt{16\cdot 2}=9\cdot 4\cdot\sqrt{2}=36\cdot\sqrt{2}$$
$$18\cdot\sqrt{8}=18\cdot\sqrt{4\cdot 2}=18\cdot 2\cdot\sqrt{2}=36\cdot\sqrt{2}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 10. Man soll die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form bringen:

a) $(-a\cdot\sqrt{-a})\cdot(+a\cdot\sqrt{-a})$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, b).

b) $x^2 z^4 \cdot \sqrt{-\frac{xy^3}{z^5}} \cdot \sqrt{-\frac{x^3y}{z^7}}$

b) Man wende zunächst den in der Antwort auf Frage 8 aufgeführten Satz an und verfahre hierauf nach den Erkl. 9 und 31.

c) $(\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-60}) - (\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-20} \cdot \sqrt{-10})$

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, f).

d) $\left(1\frac{2}{3} \cdot \sqrt{-\frac{3}{2}} - 3 \cdot \sqrt{-\frac{2}{3}} - 4 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}} - 5 \cdot \sqrt{-\frac{1}{6}}\right) \cdot (-6 \cdot \sqrt{-9})$

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, i).

e) $(\sqrt{-xy^2} + \sqrt{-y^2z}) \cdot (\sqrt{-xy^2} - \sqrt{-y^2z})$

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, l) unter Berücksichtigung der Erkl. 9 und 37.

f) $(\sqrt{-5} - \sqrt{-6} + \sqrt{-15}) \cdot (-\sqrt{-5} - \sqrt{-6} + \sqrt{-15})$

f) Ausrechnung nach Erkl. 36 durchzuführen.

g) $(\sqrt{-12} + \sqrt{-15}) \cdot (\sqrt{-48} - \sqrt{-60})$

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, k).

h) $(7 \cdot \sqrt{-5} + 6 \cdot \sqrt{-3}) \cdot (2 \cdot \sqrt{-125} - 5 \cdot \sqrt{-27}) \cdot (3 \cdot \sqrt{-1} + 4 \cdot \sqrt{-2})$

h) Man multipliziere zunächst die beiden ersten Klammern miteinander, wie in Aufgabe 9, k) gezeigt wurde. Hierauf vereinige man die gleichnamigen Glieder. Sodann multipliziere man die resultierenden Glieder mit der dritten Klammer und vereinige schliesslich das Gleichnamige.

---

c) Ueber das Dividieren.

Frage 12. Wie werden zwei imaginäre Quadratwurzeln durch einander dividiert?

Antwort. Der Quotient aus zwei imaginären Quadratwurzeln ist reell und gleich der Quadratwurzel aus dem Quotienten der Radikanden.

Behauptung.

$$\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Beweis.

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot 1$$

(nach Erkl. 19)

$$= \sqrt{\frac{a}{b}}$$ (nach Erkl. 31)

(siehe Erkl. 38 a)

Erkl. 38 a. Nach der Divisionsregel ist, wenn $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ berechnet werden soll, der Faktor zu suchen, welcher mit $\sqrt{-b}$ zu multiplizieren ist, um $\sqrt{-a}$ hervorzubringen. Dieser Faktor ist gleich $\sqrt{\frac{a}{b}}$, denn man erhält:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{\frac{a}{b} \cdot (-b)} = \sqrt{-a}$$

Frage 13. Was erhält man bei der Division zweier imaginären Zahlen, wenn:

a) der Dividendus eine imaginäre und der Divisor eine reelle Quadratwurzel,

Antwort.

a) Behauptung.

$$\sqrt{-a} : \sqrt{+b} = i \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$$

b) der Dividendus eine reelle und der Divisor eine imaginäre Quadratwurzel

ist?

Beweis.

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+b}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{-1}$$

(nach Erkl. 31)

$$= i\sqrt{\frac{a}{b}}$$

b) Behauptung.

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = -i\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Beweis.

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit $\sqrt{-1}$, so erhält man:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\cdot(\sqrt{-1})^2}$$

Nun ist:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

und

$$\sqrt{-1} = i$$

folglich gibt:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \frac{i\cdot\sqrt{a}}{-\sqrt{b}} = -i\sqrt{\frac{a}{b}}$$

(nach den Erkl. 18 und 31)

Aus den beiden Entwicklungen folgt der Satz:

„Der Quotient aus einer imaginären und einer reellen Quadratwurzel ist imaginär und zwar positiv, wenn der Dividendus imaginär ist, und negativ, wenn derselbe reell ist.“

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 11. Was erhält man für:

a) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+a}}$?

b) $\dfrac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-a}}$?

Auflösungen.

a) Nach der Antwort auf Frage 13, a) ist:

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = i\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Setzt man für $b = a$, so erhält man:

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+a}} = i\cdot\sqrt{\frac{a}{a}} = i\cdot\sqrt{1} \text{ (nach Erkl. 19)}$$
$$= i$$

---

b) Nach der Antwort auf Frage 13, b) ist:

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = -i\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Wird $b = a$, so folgt:

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-a}} = -i \cdot \sqrt{\frac{a}{a}} = -i\sqrt{1} = -i$$

c) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}}$?

c) $$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}} = 1$$

(Folgt auch direkt aus der Erkl. 19)

Aufgabe 12. Nachstehende Ausdrücke sollen auf ihre einfachste Form gebracht werden:

a) $(-3\sqrt{-96}):(-2 \cdot \sqrt{-6})$

b) $\dfrac{2 \cdot \sqrt{-5}}{3 \cdot \sqrt{6}} : \dfrac{4 \cdot \sqrt{-12}}{5 \cdot \sqrt{10}}$

Erkl. 39. Zwei Brüche werden durch einander dividiert, indem man den Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors und den Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors multipliziert.

c) $\dfrac{ab \cdot \sqrt{-cd}}{cd \cdot \sqrt{-ab}} : \dfrac{a^2b \cdot \sqrt{-c^3d^5}}{cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}}$

Auflösungen.

a) Nach Erkl. 18 und Antwort auf Frage 12 gibt:

$$\frac{-3 \cdot \sqrt{-96}}{-2 \cdot \sqrt{-6}} = +\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{96}{6}} = +\frac{3}{2} \cdot \sqrt{16}$$
$$= +\frac{3}{2} \cdot 4 = +6$$

b) Nach Erkl. 39 und 9 ist:

$$\frac{2 \cdot \sqrt{-5}}{3 \cdot \sqrt{6}} : \frac{4 \cdot \sqrt{-12}}{5 \cdot \sqrt{10}} = \frac{2 \cdot \sqrt{-5} \cdot 5 \cdot \sqrt{10}}{3 \cdot \sqrt{6} \cdot 4 \cdot \sqrt{-12}}$$
$$= \frac{10 \cdot \sqrt{-50}}{12 \cdot \sqrt{-72}}$$

Nun ist:

$$\frac{\sqrt{-50}}{\sqrt{-72}} = \sqrt{\frac{50}{72}}$$

(nach Antwort auf Frage 12)

oder:

$$= \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

Folglich ist:

$$\frac{10 \cdot \sqrt{-50}}{12 \cdot \sqrt{-72}} = \frac{10 \cdot 5}{12 \cdot 6} = \frac{25}{36}$$

c) $$\frac{ab \cdot \sqrt{-cd}}{cd \cdot \sqrt{-ab}} : \frac{a^2b \cdot \sqrt{-c^3d^5}}{cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}} = \frac{ab \cdot \sqrt{-cd} \cdot cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}}{cd \cdot \sqrt{-ab} \cdot a^2b \cdot \sqrt{-c^3d^5}}$$

(nach Erkl. 39)

Nun ist:

$\sqrt{-cd} \cdot \sqrt{-a^3b^5} = -\sqrt{a^3b^5cd}$
und
$\sqrt{-ab} \cdot \sqrt{-c^3d^5} = -\sqrt{abc^3d^5}$
(nach Antwort auf Frage 8)

also gibt:

$$\frac{ab \cdot \sqrt{-cd} \cdot cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}}{cd \cdot \sqrt{-ab} \cdot a^2b \cdot \sqrt{-c^3d^5}} = \frac{-abcd^2 \cdot \sqrt{a^3b^5cd}}{-a^2bcd \cdot \sqrt{abc^3d^5}}$$
$$= +\frac{d}{a} \cdot \sqrt{\frac{a^3b^5cd}{abc^3d^5}} = +\frac{d}{a} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^4}{c^2d^4}} = +\frac{ab^2d}{acd^2} = \frac{b^2}{cd}$$

d) $\left(\sqrt{-2}-\sqrt{-\frac{1}{2}}+\sqrt{-18}\right):\sqrt{-8}$

Erkl. 40. Eine mehrgliederige (Klammer-) Grösse wird durch eine eingliederige dividiert, indem man jedes Glied der Klammer durch den Divisor dividiert.

d) Nach Erkl. 40 erhält man für:

$$\left(\sqrt{-2}-\sqrt{-\frac{1}{2}}+\sqrt{-18}\right):\sqrt{-8}$$

$$=\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-8}}-\frac{\sqrt{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-8}}+\frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{-8}}$$

oder:

$$=\sqrt{\frac{2}{8}}-\sqrt{\frac{1}{16}}+\sqrt{\frac{18}{8}}$$

(siehe Antwort auf Frage 12)

oder:

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=1\frac{3}{4}$$

e) $(14\cdot\sqrt{-20}+15\cdot\sqrt{45}-16\cdot\sqrt{-245}-18\cdot\sqrt{180}):(-2\cdot\sqrt{-5})$

e) Es ist:

$$\frac{(14\cdot\sqrt{-20}+15\cdot\sqrt{45}-16\cdot\sqrt{-245}-18\cdot\sqrt{180})}{(-2\cdot\sqrt{-5})}$$

$$=\frac{14\cdot\sqrt{-20}}{-2\cdot\sqrt{-5}}+\frac{15\cdot\sqrt{45}}{-2\cdot\sqrt{-5}}-\frac{16\cdot\sqrt{-245}}{-2\cdot\sqrt{-5}}-\frac{18\cdot\sqrt{180}}{-2\cdot\sqrt{-5}}$$

(nach Erkl. 40)

oder:

$$=-7\cdot\sqrt{\frac{20}{5}}-7\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{45}{5}}\cdot(-i)+8\cdot\sqrt{\frac{245}{5}}+9\cdot\sqrt{\frac{180}{5}}\cdot(-i)$$

(siehe die Antworten auf die Fragen 12 und 13 und Erkl. 18)

oder:

$$=-7\cdot\sqrt{4}+7\frac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{9}+8\cdot\sqrt{49}-9i\sqrt{36}$$

$$=-7\cdot 2+7\frac{1}{2}\cdot i\cdot 3+8\cdot 7-9\cdot i\cdot 6$$

$$=-14+22\frac{1}{2}i+56-54i$$

$$=+42-31\frac{1}{2}i$$

f) $\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-\frac{96}{125}}-\frac{5}{8}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}\right):\left(-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$

f) Nach Erkl. 40 gibt:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-\frac{96}{125}}-\frac{5}{8}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}\right)}{\left(-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}=$$

$$\frac{\frac{3}{4}\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}}{-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-\frac{96}{125}}}{-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}}-\frac{\frac{5}{8}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}}{-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}}$$

Führt man die Division mit Hilfe der in der Antwort auf Frage 13, a) aufgeführten Regel und der Erkl. 17 und 39 aus, so erhält man:

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{1}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}\cdot i - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdot\sqrt{\frac{96\cdot 5}{125\cdot 6}}\cdot i + \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{1}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}}\cdot i$$

d. i.:

$$= -3i\cdot\frac{5}{6} - 2i\cdot\frac{4}{5} + \frac{5}{2}i\cdot 1$$

$$= -\frac{5}{1}i - \frac{8}{5}i + \frac{5}{2}i$$

$$= -1\frac{8}{5}i$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 13. Es sind folgende Divisionen auszuführen:

a) $(8\cdot\sqrt{-72}):\left(-4\cdot\sqrt{-\frac{1}{2}}\right)$

b) $(-xy^2\cdot\sqrt{-z^3}):(-x^2y\cdot\sqrt{z})$

c) $\frac{4\cdot\sqrt{+3}}{5\cdot\sqrt{-2}}:\frac{2\cdot\sqrt{-8}}{3\cdot\sqrt{+27}}$

d) $\left(\sqrt{-8}-\sqrt{+8}+\sqrt{-\frac{1}{8}}-\sqrt{+\frac{1}{8}}\right):\sqrt{-2}$

e) $\frac{(5\cdot\sqrt{-12}-6\cdot\sqrt{-27}+7\cdot\sqrt{-108}-8\cdot\sqrt{-75})}{(-2\cdot\sqrt{3})}$

f) $\left(\frac{7}{8}\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}+\frac{5}{6}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}-\frac{7}{12}\cdot\sqrt{-1\frac{1}{2}}\right):\left(-\frac{5}{42}\cdot\sqrt{-2\frac{2}{3}}\right)$

Erkl. 41. Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man sie mit dem Nenner des Bruches multipliziert und durch den Zähler desselben dividiert.

Erkl. 41a. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man seinen Nenner mit derselben multipliziert.

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, a) unter Berücksichtigung der Erkl. 18 und 41 und der Antwort auf Frage 12.

b) Auflösung mit Hilfe der Erkl. 18 und der Antwort auf Frage 13, a) zu vollführen.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, b) unter Berücksichtigung der Antwort auf Frage 13.

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, d) unter Berücksichtigung von Erkl. 41a.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, e) unter Berücksichtigung der Antwort auf Frage 13, a).

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, f) unter Berücksichtigung der Antwort auf Frage 12 und 13.

---

d) Ueber das Potenzieren.

Frage 14. Was erhält man für:

$$(\sqrt{-a^2})^m$$

wenn:

a) $m = 4n$

b) $m = 4n + 2$

ist?

Antwort. Ist $m = 4n$, so gibt:

$$(\sqrt{-a^2})^m = (\sqrt{-a^2})^{4n} =$$
$$(\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{-1})^{4n} = a^{4n}\cdot i^{4n}$$

Nun ist:

$$i^{4n} = +1$$

[nach Formel 1) des Formelverzeichnisses]

folglich:

$$a^{4n} \cdot i^{4n} = +a^{4n}$$

oder:

$$= +a^m$$

Ist $m = 4n + 2$, so erhält man:

$$(\sqrt{-a^2})^m = (\sqrt{-a^2})^{4n+2} =$$

$$(\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1})^{4n+2} = a^{4n+2} \cdot i^{4n+2}$$

und, da $i^{4n+2} = -1$ ist

[nach Formel 3) des Formelverzeichnisses]

so folgt:

$$a^{4n+2} \cdot i^{4n+2} = -a^{4n+2}$$

oder:

$$= -a^m$$

In Worten:

„Alle geraden Potenzen einer imaginären Zahl sind reell und positiv, wenn der Potenzexponent durch 4 ohne Rest teilbar ist; jedoch negativ, wenn dies nicht der Fall ist.“

Erkl. 42. Ein Satz der Potenzlehre lautet: „Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden einzelnen Faktor potenziert.“

In Zeichen:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

Umgekehrt ist auch:

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

(Siehe Kleyers „Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln.“)

Frage 15. Was erhält man für die geraden Potenzen einer imaginären Zahl, wenn der Potenzexponent m negativ und

a) $m = 4n$

b) $m = 4n + 2$

ist?

Antwort. Nach Erkl. 24 ist:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = \frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m}$$

Ist $m = 4n$, so erhält man nach der vorigen Antwort:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = \frac{1}{(\sqrt{-a^2})^{4n}} = \frac{1}{+a^{4n}}$$

oder:

$$= \frac{1}{a^m}$$

Ist $m = 4n + 2$, so gibt:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = \frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m} = \frac{1}{-a^{4n+2}}$$

(nach der Antwort auf Frage 14)

$$= -\frac{1}{a^{4n+2}}$$

oder:

$$= -\frac{1}{a^m}$$

Frage 16. Was erhält man für:

$$(\sqrt{-a^2})^m$$

wenn:

a) $m = 4n + 1$

b) $m = 4n + 3$

ist?

Antwort. Ist $m = 4n + 1$, so ist:

$$(\overline{-a^2})^m - (\sqrt{-a^2})^{4n+1} =$$

$$(\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1})^{4n+1} = a^{4n+1} \cdot i^{4n+1}$$

Nun ist:

$$i^{4n+1} = +i \text{ [nach Formel 2)]}$$

folglich ist:

$$a^{4n+1} \cdot i^{4n+1} = a^{4n+1} \cdot i$$

oder:

$$= a^m \cdot i$$

Ist $m = 4n + 3$, so erhält man für:

$$(\sqrt{-a^2})^m = a^{4n+3} \cdot i^{4n+3}$$

und, da $i^{4n+3} = +i$ ist [nach Formel 4)] so folgt:

$$(\sqrt{-a^2})^m = -a^m \cdot i$$

In Worten:

„Alle **ungeraden** Potenzen einer imaginären Zahl sind **imaginär** und **positiv**, wenn der Potenzexponent, durch 4 geteilt, den Rest 1, **negativ**, wenn er den Rest 3 lässt."

Frage 17. Was erhält man für die ungeraden Potenzen einer imaginären Zahl, wenn der Exponent **negativ** ist?

Antwort. Nach Erkl. 24 ist:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = \frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m}$$

Für $m = 4n + 1$ gibt:

$$\frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m} = \frac{1}{a^m \cdot i} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{i}$$

(nach der Antwort auf Frage 16)

Nun ist:

$$\frac{1}{i} = -i \text{ [nach Antwort a) auf Frage 4]}$$

folglich ist:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = -\frac{1}{a^m} \cdot i = -\frac{i}{a^m}$$

Für $m = 4n + 3$ ist:

$$\frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m} = \frac{1}{-a^m \cdot i} = -\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{i}$$

(nach der Antwort auf Frage 16)

oder:

$$= -\frac{1}{a^m} \cdot (-i) = +\frac{i}{a^m}$$

Frage 18. Mit Hilfe welcher Formeln lassen sich die Potenzen der imaginären Zahlen berechnen?

Antwort. Bezeichnet man den reellen Faktor der imaginären Zahl mit r und mit n eine positive ganze Zahl, so erhält man:

1) $(r \cdot i)^{4n} = r^{4n}$

2) $(r \cdot i)^{4n+1} = r^{4n+1} \cdot i$

3) $(r \cdot i)^{4n+2} = -r^{4n+2}$

4) $(r \cdot i)^{4n+3} = -r^{4n+3} \cdot i$

5) $(r \cdot i)^{-4n} = \left(\frac{1}{r}\right)^{4n}$

6) $(r \cdot i)^{-(4n+1)} = -\frac{i}{r^{4n+1}}$

7) $(r \cdot i)^{-(4n+2)} = -\left(\frac{1}{r}\right)^{4n+2}$

8) $(r \cdot i)^{-(4n+3)} = +\frac{i}{r^{4n+3}}$

Die Richtigkeit dieser Formeln ergibt sich ohne weiteres aus den vorstehenden Antworten.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 14. Es sind mit Hilfe der in Antwort auf Frage 18 aufgeführten Formeln die nachfolgenden Potenzen zu berechnen:

a) $(\sqrt{-5})^4$ e) $(\sqrt{-3})^{-8}$

b) $(\sqrt{-5})^5$ f) $(\sqrt{-3})^{-9}$

c) $(\sqrt{-5})^6$ g) $(\sqrt{-3})^{-10}$

d) $(\sqrt{-5})^7$ h) $(\sqrt{-3})^{-11}$

Erkl. 43. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Eine Wurzel wird potenziert, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert."

In Zeichen: $(\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{n}{m}}$

Erkl. 43a. Eine Potenz mit einem Bruchexponenten (sog. Bruchpotenz) ist eine andere Form für eine Potenz unter einer Wurzel, z. B.:

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5^1} = 5$$

$$6^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{6^3} = \sqrt{216}$$

Erkl. 43b. Man erhält nach den beiden vorstehenden Erklärungen für:

$$(\sqrt{-5})^5 = +(\sqrt{5})^5 \cdot i^5 = 5^{\frac{5}{2}} \cdot i$$

$$= 5^2 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot i = 25 i \sqrt{5}$$

$$(\sqrt{-5})^7 = +(\sqrt{5})^7 \cdot i^7 = 5^{\frac{7}{2}} \cdot (-i)$$

$$= -5^3 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot i = -125 i \sqrt{5}$$

$$(\sqrt{3})^9 = 3^{\frac{9}{2}} = 3^4 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 81 \cdot \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3})^{11} = 3^{\frac{11}{2}} = 3^5 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 243 \cdot \sqrt{3}$$

Auflösung.

a) $(\sqrt{-5})^4 = (\sqrt{5} \cdot i)^4 = (\sqrt{5})^4$
[nach Formel 1), $n = 1$ gesetzt].

Also gibt:

$$(\sqrt{-5})^4 = 5^2 \text{ (nach Erkl. 43)} = 25$$

b) $(\sqrt{-5})^5 = (\sqrt{-5})^{4 \cdot 1 + 1}$
$= (\sqrt{5} \cdot i)^{4 \cdot 1 + 1}$

also nach Formel 2):

$$= (\sqrt{5})^5 \cdot i = 25\, i \sqrt{5}$$

(siehe Erkl. 43b).

c) $(\sqrt{-5})^6 = (\sqrt{5} \cdot i)^{4 \cdot 1 + 2}$

demnach nach Formel 3):

$$= -(\sqrt{5})^6 = -5^3 \text{ (nach Erkl. 43)}$$
$$= -125$$

d) $(\sqrt{-5})^7 = (\sqrt{5} \cdot i)^{4 \cdot 1 + 3}$

also nach Formel 4):

$$= -(\sqrt{5})^7 \cdot i = -125\, i \sqrt{5}$$

(siehe Erkl. 43b).

e) $(\sqrt{-3})^{-8} = (\sqrt{-3})^{-4 \cdot 2}$

demnach nach Formel 5), $n = 2$ gesetzt:

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8 = \frac{1^8}{3^4} \text{ (nach Erkl. 43)}$$
$$= \frac{1}{81}$$

f) $(\sqrt{-3})^{-9} = (\sqrt{-3})^{-(4 \cdot 2 + 1)}$
$= (\sqrt{3} \cdot i)^{-(4 \cdot 2 + 1)}$

also nach Formel 6):

$$= -\frac{i}{(\sqrt{3})^9} = -\frac{i}{81 \sqrt{3}}$$

(siehe Erkl. 34b).

g) $(\sqrt{-3})^{-10} = (\sqrt{-3})^{-(4\cdot 2+2)} = (\sqrt{3}\cdot i)^{-(4\cdot 2+2)}$
demnach nach Formel 7):

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{10} = -\frac{1}{3^5} \text{ (nach Erkl. 43)}$$

$$= -\frac{1}{243}$$

---

h) $(\sqrt{-3})^{-11} = (\sqrt{-3})^{-(4\cdot 2+3)} = (\sqrt{3}\cdot i)^{-(4\cdot 2+3)}$
also nach Formel 8):

$$= +\frac{i}{(\sqrt{3})^{11}} = +\frac{i}{243\sqrt{3}}$$

(siehe Erkl. 43 b).

Aufgabe 15. Nachfolgende Ausdrücke sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\left(+a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7\cdot\left(-a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$

Erkl. 44. Ein Satz aus der Potenzlehre lautet:

„Ein Bruch wird potenziert, indem man seinen Zähler und seinen Nenner potenziert."

In Zeichen:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Umgekehrt ist:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Erkl. 45. Werden Wurzeln mit gleichem Exponenten und gleichem Radikandus so oft miteinander multipliziert, als der Exponent Einheiten besitzt, so erhält man den Radikandus; z. B.:

$$\sqrt[2]{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt[2]{\frac{b}{c}} = \sqrt[2]{\frac{b^2}{c^2}} \text{ (nach Erkl. 9)} = \frac{b}{c}$$

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

Erkl. 45 a. Nach den Erkl. 43 und 44 ist:

$$\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^7 = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{7}{2}} = \frac{b^3\cdot b^{\frac{1}{2}}}{c^3\cdot c^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3}{c^3}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^5 = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{b^2\cdot b^{\frac{1}{2}}}{c^2\cdot c^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^2}{c^2}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$$

Auflösung. a) Der Faktor:

$$\left(+a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7$$

gibt nach Erkl. 42:

$$= a^7\cdot\left(\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7$$

oder:

$$= a^7\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot i\right)^{4\cdot 1+3}$$

folglich nach Formel 17) des Formelverzeichnisses:

$$= a^7\cdot\left[-\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^7\cdot i\right]$$

oder:

$$= -a^7\cdot\frac{b^3}{c^3}\cdot i\cdot\sqrt{\frac{b}{c}} \text{ (s. Erkl. 45 a)}$$

Der Faktor:

$$\left(-a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$$

gibt nach Erkl. 42:

$$= -a^5\cdot\left(\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$$

oder:

$$= -a^5\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot i\right)^{4\cdot 1+1}$$

folglich nach Formel 15):

$$= -a^5\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^5\cdot i$$

oder:

$$= -a^5\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot i\sqrt{\frac{b}{c}} \text{ (s. Erkl. 45 a)}$$

Mithin erhält man für:

$$\left(+a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7\cdot\left(-a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$$

$$= \left(-\frac{a^7b^3}{c^3}\cdot i\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\right)\cdot\left(-\frac{a^5b^2}{c^2}\cdot i\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$$

$$= +\frac{a^{12}b^5}{c^5}\cdot i^2\cdot\frac{b}{c} \text{ (nach d. Erkl. 18 a, 23 u. 45)}$$

oder:

$$= -\frac{a^{12} b^6}{c^6}$$

weil $i^2 = -1$ ist.

---

b) $\left(+3 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^5$

b) Der **erste** Faktor:

$$\left(+3 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

gibt nach Erkl. 42 und Antwort auf Frage 2

$$= +3^3 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot i^3$$

oder:

$$= +27 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot (-i)$$

(nach Erkl. 43)

d. i.:

$$= -9i\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Der **zweite** Faktor:

$$\left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^5$$

ist nach Formel 15) des Formelverzeichnisses:

$$= -2^5 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^5 \cdot i \quad (\text{denn } 5 = 4 \cdot 1 + 1)$$

oder:

$$= -32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i \quad (\text{nach Erkl. 43})$$

d. i.:

$$= -8i\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Mithin gibt:

$$\left(+3\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^5 = \left(-9i\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(-8i\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = +72i^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$$

(nach den Erkl. 9 und 18 a)

oder, weil $i^2 = -1$ ist:

$$= -72\sqrt{\frac{1}{6}}$$

---

c) $\dfrac{(-\sqrt{-a^2 b^3})^7}{(+\sqrt{-a^3 b^2})^5}$

Erkl. 46. Es gibt:

$$(\sqrt{a^2 b^3})^7 = \left(a^{\frac{2}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}}\right)^7 = a^{\frac{14}{2}} \cdot b^{\frac{21}{2}} = \sqrt[2]{a^{14} b^{21}}$$

$$(\sqrt{a^3 b^2})^5 = \left(a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{2}{2}}\right)^5 = a^{\frac{15}{2}} \cdot b^{\frac{10}{2}} = \sqrt[2]{a^{15} b^{10}}$$

c) Man erhält für:

$$\frac{(-\sqrt{-a^2 b^3})^7}{(+\sqrt{-a^3 b^2})^5} = \frac{(-\sqrt{-a^2 b^3})^{4 \cdot 1 + 3}}{(+\sqrt{-a^3 b^2})^{4 \cdot 1 + 3}}$$

oder nach den Formeln 17) bezw. 15):

$$= \frac{-[-(\sqrt{a^2 b^3})^7 \cdot i]}{+[(\sqrt{a^3 b^2})^5 \cdot i]} = \frac{+i\sqrt{a^{14} b^{21}}}{+i\sqrt{a^{15} b^{10}}}$$

(siehe Erkl. 46)

oder:

$$= \sqrt{\frac{a^{14} b^{21}}{a^{15} b^{10}}} = \sqrt{\frac{b^{11}}{a}} = b^5 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$$

---

d) $\frac{(\sqrt{-8})^4}{(-\sqrt{-3})^3} : \frac{(\sqrt{-12})^5}{(-\sqrt{-2})^2}$

Erkl. 47. Man erhält für:

$(\sqrt{-8})^4 = (\sqrt{8})^4 \cdot i^4 = 8^2 \cdot 1 = +64$

$(-\sqrt{-2})^2 = (-\sqrt{2} \cdot i)^2$

$= (-\sqrt{2})^2 \cdot (-1) = -2$

d) Nach Erkl. 39 ist:

$$\frac{(\sqrt{-8})^4}{(-\sqrt{-3})^3} : \frac{(\sqrt{-12})^5}{(-\sqrt{-2})^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{-8})^4 \cdot (-\sqrt{-2})^2}{(-\sqrt{-3})^3 \cdot (\sqrt{-12})^5}$$

$$= \frac{(\sqrt{8})^2 \cdot (-\sqrt{2})^2 \cdot (-1)}{i(\sqrt{3})^3 \cdot i \cdot (\sqrt{12})^5}$$

$$= \frac{64 \cdot 2 \cdot (-1)}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot 288 \cdot \sqrt{3} \cdot i^2} \quad \text{(s. Erkl. 47)}$$

oder:

$$= \frac{-64 \cdot 2}{-3 \cdot 288 \cdot 3}$$ [nach Erkl. 45 und Antw. auf Frage 4, c)]

oder:

$$= +\frac{4}{81}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 16. Es sind mit Hilfe der Formeln 14) bis 21) des Formelverzeichnisses die nachstehenden Potenzen zu berechnen:

a) $(\sqrt{-2})^{12}$ e) $(\sqrt{-6})^{-4}$

b) $(\sqrt{-2})^{13}$ f) $(\sqrt{-6})^{-5}$

c) $(\sqrt{-2})^{14}$ g) $(\sqrt{-6})^{-6}$

d) $(\sqrt{-2})^{15}$ h) $(\sqrt{-6})^{-7}$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 14, a) bis 14, h).

Aufgabe 17. Es sind die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\left(+a \cdot \sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7 : \left(-a \cdot \sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$

b) $\left(+4 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^4 \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{8}}\right)^5$

c) $(+a \cdot \sqrt{-ab^3})^3 \cdot (-b \cdot \sqrt{-a^3b})^4$

d) $\frac{(-3 \cdot \sqrt{-2})^8}{(+2 \cdot \sqrt{-3})^6}$

e) $\frac{(\sqrt{-5})^2}{(-\sqrt{-3})^5} : \frac{(-\sqrt{-27})^3}{(\sqrt{-2})^4}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, c).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, b).

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, a).

d) Man bringe Zähler und Nenner des gegebenen Bruches für sich allein auf die kürzeste Form und führe hierauf erst die Division aus.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, d).

B. Ueber die komplexen Zahlen.

Anmerkung 5. Zum Verständnis der nachfolgenden Lösungen von Problemen sind die in der Anmerkung 3 erwähnten Vorkenntnisse ausreichend.

1) Ueber die komplexen Zahlen im allgemeinen.

Frage 19. Was versteht man unter einer komplexen oder lateralen Zahl und wie wird eine solche Zahl dargestellt?

Erkl. 48. Das Wort „komplex" stammt aus dem Lateinischen und bedeutet „zusammengesetzt" oder „vereinigt".

Erkl. 49. Die zweigliederigen Ausdrücke von der Form $a+bi$ werden nach Cauchy (Anal. algébr. 1821) „komplexe Zahlen" oder auch kurz „Komplexe", nach Gauss (Theoria residuorum biquadraticorum, Comm. societ. Gotting. Vol. VII, 1828 bis 1832, pag. 96) „laterale Zahlen" oder kurz „Laterale" [d. h. „seitwärts liegende" vom Lat. latus (Seite); vergl. Abschnitt C.] und nach Mourey „nombres directives" (auf deutsch „Richtungszahlen") genannt. Am gebräuchlichsten ist jedoch die von Cauchy eingeführte Bezeichnung.

Erkl. 49a. Die beiden Glieder der komplexen Zahl können nicht miteinander verglichen werden, weil sie verschiedenen Zahlengebieten angehören. Das sie verbindende $+$ Zeichen deutet nur einen Zusammenhang der beiden Glieder an und darf nicht als ein Additionszeichen angesehen werden, weil durch ein solches nur gleichartige Zahlen (reelle Zahlen mit reellen oder imaginäre Zahlen mit imaginären) verbunden werden können.

Antwort. Unter einer komplexen oder lateralen Zahl versteht man einen, aus einem reellen und einem imaginären Gliede zusammengesetzten Ausdruck von der Form:

$$a+bi$$

in welchem a und b irgend welche, positiven oder negativen, reellen Zahlen bedeuten.

Frage 20. Wie viele komplexe Zahlen lassen sich mit Rücksicht auf die Zeichen bilden?

Antwort. Je nachdem die reellen Bestandteile a und b positiv oder negativ sind, erhält man folgende vier, nur durch die Zeichen von einander abweichende komplexe Zahlen:

$$+a+bi$$
$$-a+bi$$
$$+a-bi$$
$$-a-bi$$

Frage 21. Was versteht man unter zwei konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Unter zwei konjugierten komplexen Zahlen versteht man Komplexe, die nur durch das Zeichen

des imaginären Gliedes von einander abweichen.

Hiernach ist das Konjugierte von $a+bi$ die Komplexe $a-bi$ und von $-a+bi$ die komplexe Zahl $-a-bi$ — und umgekehrt.

Erkl. 50. Das Wort „konjugiert" stammt vom lateinischen Worte conjugere und bedeutet „verbunden" oder „zusammengehörig".

Erkl. 50a. Die Bezeichnung „konjugierte komplexe Zahlen" für zwei Komplexe von der Form $a+bi$ und $a-bi$ wurde zuerst von Cauchy (Anal. algébr. c. 7, 1821) gebraucht.

Erkl. 50b. Lejeune Dirichlet (Ueber die Theorie der komplexen Zahlen) nennt „zusammengehörig" vier komplexe Zahlen:

$$a+bi;\quad -b+ai;\quad -a-bi;\quad b-ai$$

welche so von einander abhängen, dass irgend drei derselben aus der vierten entstehen, wenn man diese mit -1, $\pm i$ multipliziert.

Frage 22. Wann nennt man zwei komplexe Zahlen associiert?

Antwort. Zwei komplexe Zahlen heissen associiert, wenn sie gleiche Zahlenwerte, aber entgegengesetzte Zeichen besitzen.

Hiernach sind associierte komplexe Zahlen: $a+bi$ und $-a-bi$.

Erkl. 51. Das Wort „associiert" (vom französischen Worte associer stammend) bedeutet „zugesellt" oder „vereinigt", auch „verbunden".

---

2) Ueber die komplexen Zahlen im besondern.

Frage 23. Was versteht man unter einer veränderlichen und was unter einer stetig veränderlichen komplexen Zahl?

Antwort. Man erhält alle zu dem reellen Bestandteile a gehörigen komplexen Zahlen, wenn die Zahl b die reelle Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, und überhaupt alle komplexen Zahlen, wenn weiter a der Reihe nach alle zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden (reellen) Werte annimmt. — Verändern sich die beiden reellen Bestandteile a und b der Komplexen $a+bi$ sprungweise, d. h. haben die aufeinanderfolgenden Werte dieser Zahlen irgend welche Differenzen oder verändert sich nur eine von ihnen entweder sprungweise oder stetig (d. h. ununterbrochen, so dass die Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte unendlich klein ist), so nennt man die komplexe Zahl eine „veränderliche Komplexe". — Verändern sich dagegen die beiden reellen Bestandteile stetig, so dass einer unendlich kleinen Zunahme (bezw. Abnahme) von a eine

Erkl. 52. Man unterscheidet unveränderliche oder konstante und veränderliche oder variable Grössen. „Unveränderliche" oder „Konstante" sind solche Grössen, die unveränderlich sind oder gedacht werden, „Veränderliche" oder „Variable" dagegen solche, die Veränderungen erleiden oder denen solche zugedacht werden können. Eine Zu- oder Abnahme einer Grösse kann nur dann eintreten, wenn diese Grösse selbst eine „Veränderliche" ist.

Erkl. 52a. Die Wörter „variabel" und „konstant" stammen aus dem Lateinischen; ersteres von varius, d. h. „wechselnd", letzteres von constans, d. h. „beständig".

unendlich kleine Zunahme (bezw. Abnahme) von b entspricht, so nennt man die komplexe Zahl eine „stetig veränderliche Komplexe“.

Frage 24. Was wird aus der komplexen Zahl $a+bi$, wenn einer ihrer reellen Bestandteile oder beide gleichzeitig Null oder unendlich gross werden?

Erkl. 53. Die komplexen Zahlen umfassen alle Zahlen. $a+bi$ geht in die reelle Zahl a über, wenn b zu Null wird, und in die rein imaginäre Zahl bi, wenn a verschwindet. Da sich alle imaginären Zahlen, wie im ersten Teile dieses Werkes nachgewiesen wurde, auf die imaginäre Einheit zurückführen lassen, so ist es möglich, jede imaginäre Zahl mit Hilfe von $\sqrt{-1}$ auf die Form $a+b\cdot\sqrt{-1}$ zu bringen [vergl. Aufgabe 39, e)].

Erkl. 53a. Die allgemeine Form der Zahlen ist die komplexe. Dies ergibt sich ohne weiteres aus der Erkl. 53.

Erkl. 54. Dass $a+bi=0$ ist, wenn sowohl $a=0$ als auch $b=0$ ist, lässt sich auch, wie folgt, beweisen. Die beiden Glieder der Komplexen sind ungleichartig, sie können sich also unmöglich gegenseitig aufheben, und es kann daher nur dann die komplexe Zahl verschwinden, wenn jedes Glied derselben gleichzeitig gleich Null ist.

Antwort. Wird in der komplexen Zahl $a+bi$ der reelle Bestandteil a gleich Null, so erhält man:

$$a+bi=0+bi=bi$$

In Worten:

„Eine komplexe Zahl wird zu einer rein imaginären, wenn ihr reelles Glied verschwindet.“

Wird dagegen b gleich Null, so ergibt sich:

$$a+bi=a+0\cdot i=a$$

In Worten:

„Eine komplexe Zahl geht in eine reelle über, wenn ihr imaginäres Glied verschwindet.“

Sind beide reellen Bestandteile gleichzeitig gleich Null, so wird aus:

$$a+bi=0+0\cdot i=0$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Eine komplexe Zahl wird zu Null, wenn ihr reelles und ihr imaginäres Glied gleichzeitig gleich Null werden.“ (Siehe Erkl. 5.)

Setzt man $a=\infty$, so erhält man:

$$a+bi=\infty+bi=\infty$$

und für $b=\infty$:

$$a+bi=a+\infty\cdot i=\infty$$

In Worten:

„Eine komplexe Zahl wird unendlich gross, wenn einer ihrer reellen Bestandteile (oder beide gleichzeitig) unendlich gross werden.“

Frage 25. Wann sind zwei komplexe Zahlen einander gleich?

Antwort. Zwei komplexe Zahlen sind einander gleich, wenn sie sowohl in ihren reellen als auch in ihren imaginären Gliedern vollständig übereinstimmen.

Erkl. 55. Ein Satz aus der Lehre von den Gleichungen lautet:

„Man kann Glieder beliebig von der einen Seite der Gleichung auf die andere schaffen (transponieren), wenn man dabei ihre Vorzeichen umkehrt.“

Behauptung.

$$a + bi = \alpha + \beta i$$

wenn $a = \alpha$ und $bi = \beta i$ oder $b = \beta$ ist.

Beweis. Aus $a + bi = \alpha + \beta i$ folgt nach Erkl. 55:

$$a + bi - \alpha - \beta i = 0$$

oder:

$$(a - \alpha) + (b - \beta)i = 0 \text{ (nach Erkl. 26)}$$

Wäre nun $(b - \beta) \gtrless 0$, so würde $(a - \alpha)$, d. h. die Differenz zweier reellen Zahlen gleich einer imaginären Zahl sein. Da dieses widersinnig ist, so muss $(b - \beta) = 0$, d. h. $b = \beta$ und demnach auch $a = \alpha$ sein.

3) Ueber das Rechnen mit komplexen Zahlen.

Anmerkung 6. Da die komplexen Zahlen zweigliedrige Ausdrücke (sogen. Binomien) sind, so werden die für das Rechnen mit mehrgliedrigen Zahlen in der niederen Algebra aufgestellten Gesetze auch auf sie angewendet werden können, solange hierdurch keine Widersprüche entstehen.

a) Ueber das Addieren und Subtrahieren.

Frage 26. Wie werden zwei (oder mehrere) komplexe Zahlen addiert?

Antwort. Die Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl, deren reelles Glied gleich der Summe der reellen Glieder und deren imaginäres Glied gleich der Summe der imaginären Glieder der gegebenen Komplexen ist.

Denn man erhält für:

$$(a + bi) + (\alpha + \beta i) = a + \alpha + bi + \beta i = (a + \alpha) + (b + \beta) \cdot i \text{ (nach Erkl. 26)}$$

Erkl. 56. Die allgemeine Formel für die Summe zweier komplexer Zahlen lautet:

$$(\pm a \pm bi) + (\pm \alpha \pm \beta i) = (\pm a \pm \alpha) + (\pm b \pm \beta) \cdot i$$

Frage 27. Was gibt die Summe zweier konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Man erhält für:

$$(a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b) \cdot i = 2a$$

Hieraus folgt der Satz:

„Die Summe zweier konjugierten komplexen Zahlen ist reell.“

Frage 28. Was gibt die Summe zweier associierten komplexen Zahlen?

Antwort. Es gibt:

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b) \cdot i = 0$$

In Worten:

„Die Summe zweier associierten komplexen Zahlen ist gleich Null.“

Frage 29. Wie werden zwei komplexe Zahlen von einander subtrahiert?

Erkl. 57. Vorstehende Frage lässt sich auch wie folgt beantworten:

„Man subtrahiert zwei komplexe Zahlen von einander, indem man das reelle Glied des Subtrahendus zu dem des Minuendus und das imaginäre Glied des Subtrahendus zu dem des Minuendus mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.“

Erkl. 58. Die allgemeine Formel für die Differenz zweier komplexen Zahlen lautet:

$$(\pm a \pm bi) - (\pm \alpha \pm \beta i) = (\pm a \mp \alpha) + (\pm b \mp \beta) \cdot i$$

Antwort. Die Differenz zweier komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl, deren reelles Glied gleich der Differenz der reellen Glieder und deren imaginäres Glied gleich der Differenz der imaginären Glieder der gegebenen Komplexen ist.

Denn man erhält:

$$(a + bi) - (\alpha + \beta i) = a + bi - \alpha - \beta i$$

(nach Erkl. 28a)

oder:

$$= (a - \alpha) + (b - \beta)i$$

(nach Erkl. 26)

Frage 30. Wann ist die Differenz zweier komplexen Zahlen gleich Null?

Antwort. Die Differenz zweier komplexen Zahlen ist gleich Null, wenn das reelle Glied des Minuendus gleich dem des Subtrahendus und zugleich das imaginäre Glied des Minuendus gleich dem des Subtrahendus ist.

Behauptung.

$$(a + bi) - (\alpha + \beta i) = 0$$

wenn $\alpha = a$ und $\beta i = bi$ oder $\beta = b$ ist.

Beweis.

$$(a + bi) - (\alpha + \beta i) = (a - \alpha) + (b - \beta)i$$

(nach Antwort auf Frage 29)

Ist nun $\alpha = a$ und $\beta = b$, so erhält man für:

$$(a + bi) - (\alpha + \beta i) = (a + bi) - (a + bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i = 0$$

Frage 31. Was gibt die Differenz zweier konjugierten komplexen Zahlen?

Erkl. 59. Ist die Komplexe $(a - bi)$ der Minuendus, so erhält man als Differenz eine negative imaginäre Zahl.

Denn es gibt:

$$(a - bi) - (a + bi) = a - bi - a - bi$$

(nach Erkl. 28a)

oder:

$$= -2bi$$

Antwort. Man erhält für:

$$(a + bi) - (a - bi) = a + bi - a + bi$$

(nach Erkl. 28a)

oder:

$$= +2bi$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Die Differenz zweier konjugierten komplexen Zahlen ist imaginär.“

Frage 32. Was erhält man für die Differenz zweier associierten komplexen Zahlen?

Antwort. Es gibt:

$$(a + bi) - (-a - bi) = a + bi + a + bi$$

(nach Erkl. 28a

Erkl. 60. Ist die Komplexe $(-a-bi)$ **der Minuendus, so erhält man eine negative Differenz.**

Denn es gibt:

$$(-a-bi)-(a+bi)=-a-bi-a-bi$$
$$=-2\cdot(a+bi)$$

oder: $=2a+2bi$

d. i.: $=2\cdot(a+bi)$

(nach Erkl. 26)

In Worten:

„Die Differenz zweier associierten komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 18. Nachfolgende Ausdrücke sollen auf ihre einfachste Form gebracht werden:

a) $(\sqrt{36}+\sqrt{-25})+(\sqrt{-49}-2\cdot\sqrt{144})+(i\cdot\sqrt{-81}-i\sqrt{64})$

Auflösungen. (Siehe die Anmerkungen 4 und 6.)

a) Sondert man zunächst die imaginäre Einheit ab und zieht man die Wurzeln, so erhält man für:

$$(\sqrt{36}+\sqrt{-25})+(\sqrt{-49}-2\cdot\sqrt{144})+(i\sqrt{-81}-i\sqrt{64})=$$
$$(6+5i)+(7i-24)+(9i^2-8i)$$

oder, weil $i^2=-1$ ist [siehe Frage 4, c)]:

$$=(6+5i)+(-24+7i)+(-9-8i)$$

Nach Antwort auf Frage 26 gibt aber:

$$(6+5i)+(-24+7i)+(-9-8i)$$
$$=(6-24-9)+(5+7-8)\cdot i$$

oder:

$$=-27+4i$$

---

b) $\left(3\cdot\sqrt{-36a^2}+4\cdot\sqrt[3]{\frac{27b^6}{8}}\right)+\left(5b^2\cdot\sqrt{\frac{49}{25}}-6a\cdot\sqrt{-81}\right)+\left(7ab\cdot\sqrt[3]{\frac{64b^3}{a^3}}-8a\cdot\sqrt{-16}\right)$

b) Nach der Absonderung der imaginären Einheit und nach dem Ausziehen der Wurzeln gibt:

$$\left(3\cdot\sqrt{-36a^2}+4\cdot\sqrt[3]{\frac{27b^6}{8}}\right)+\left(5b^2\cdot\sqrt{\frac{49}{25}}-6a\cdot\sqrt{-81}\right)+\left(7ab\cdot\sqrt[3]{\frac{64b^3}{a^3}}-8a\cdot\sqrt{-16}\right)$$
$$=\left(3\cdot6\cdot a\cdot i+4\cdot\frac{3}{2}\cdot b^2\right)+\left(5\cdot b^2\cdot\frac{7}{5}-6\cdot a\cdot9\cdot i\right)+\left(7ab\cdot\frac{4\cdot b}{a}-8a\cdot4\cdot i\right)$$

oder:

$$=(18ai+6b^2)+(7b^2-54ai)+(28b^2-32ai)$$

Die Summe dieser komplexen Zahlen ist nach Antwort auf Frage 26:

$$=(6b^2+7b^2+28b^2)+(18a-54a-32a)\cdot i$$

oder:

$$=42b^2-68ai$$

---

c) $(-ai \cdot \sqrt{-b^4} + b \cdot \sqrt{-a^2}) + (ab^2 - a \cdot \sqrt{-b^2})$

c) Man erhält für:

$$(-ai \cdot \sqrt{-b^4} + b \cdot \sqrt{-a^2}) + (ab^2 - a \cdot \sqrt{-b^2}) = (-ai \cdot b^2 \cdot i + abi) + (ab^2 - abi)$$

oder:

$$= (-ab^2 i^2 + abi) + (ab^2 - abi)$$

oder, weil $i^2 = -1$ ist:

$$= (ab^2 + abi) + (ab^2 - abi)$$

Die Summe dieser konjugierten Komplexen gibt nach Antwort auf Frage 27:

$$= +2ab^2$$

---

d) $(0{,}6 + 0{,}8\,i) - \left(\frac{3}{5} - \sqrt{-0{,}64}\right)$

d) Es ist:

$$(0{,}6 + 0{,}8\,i) - \left(\frac{3}{5} - \sqrt{-0{,}64}\right) = (0{,}6 + 0{,}8i) - (0{,}6 - 0{,}8i) = +1{,}6i$$

(nach Antwort auf Frage 31)

---

e) $(-2 \cdot \sqrt[4]{10000} + 4i^2 \cdot \sqrt{-36}) - \left(2i\sqrt{-81} + \frac{4 \cdot \sqrt{30{,}25}}{i}\right)$

e) Es gibt der Minuendus:

$$(-2 \cdot \sqrt[4]{10000} + 4i^2 \cdot \sqrt{-36}) = (-2 \cdot 10 - 4 \cdot 6i)$$

weil $i^2 = -1$ ist, oder:

$$= (-20 - 24i)$$

und der Subtrahendus:

$$\left(2i\sqrt{-81} + \frac{4 \cdot \sqrt{30{,}25}}{i}\right) = (2i \cdot 9i - 4 \cdot 5{,}5 \cdot i)$$

weil $\frac{1}{i} = -i$ ist [siehe Frage 4, a)], oder:

$$= (-18 - 22i)$$

Mithin erhält man für:

$$(-2 \cdot \sqrt[4]{10000} + 4i^2 \cdot \sqrt{-36}) - \left(2i \cdot \sqrt{-81} + \frac{4 \cdot \sqrt{30{,}25}}{i}\right)$$

$$= (-20 - 24i) - (-18 - 22i)$$

$$= (-20 + 18) + (-24 + 22) \cdot i$$

(nach Erkl. 58)

oder:

$$= -2 - 2i = -2 \cdot (1 + i)$$

(nach Erkl. 26)

---

f) $\sqrt{-49} + \left[(4 - \sqrt{-64}) - \left(\sqrt{-100} + 5 \cdot \sqrt{\frac{4}{25}}\right)\right] - \left[(3 \cdot \sqrt{-25} + 4 \cdot \sqrt[3]{512}) + \left(\sqrt[5]{32} - \sqrt{-2\frac{1}{4}}\right)\right] - \left(3 \cdot \sqrt{-1\frac{7}{9}} - 5i \cdot \sqrt{-1\frac{9}{16}}\right)$

f) Man erhält nach Absonderung der imaginären Einheit für:

$$\sqrt{-49}+\left[(4-\sqrt{-64})-\left(\sqrt{-100}+5 \cdot \sqrt{\frac{4}{25}}\right)\right]$$
$$-\left[\left(3 \cdot \sqrt{-25}+4 \cdot \sqrt[3]{512}+\left(\sqrt[5]{32}-\sqrt{-2\frac{1}{4}}\right)\right]\right.$$
$$-\left(3 \cdot \sqrt{-1\frac{7}{9}}-5i \cdot \sqrt{-1\frac{9}{16}}\right)$$
$$= i \cdot \sqrt{49}+\left[(4-i\sqrt{64})-\left(i \cdot \sqrt{100}+5 \cdot \sqrt{\frac{4}{25}}\right)\right]$$
$$-\left[(3i \cdot \sqrt{-25}+4 \cdot \sqrt[3]{512})+\left(\sqrt[5]{32}-i \cdot \sqrt{\frac{9}{4}}\right)\right]$$
$$-\left(3i \cdot \sqrt{\frac{16}{9}}-5i^2 \cdot \sqrt{\frac{25}{16}}\right)$$

oder, wenn man die Wurzeln zieht und für $i^2 = -1$ setzt:

$$= 7i+[(4-8i)-(10i+2)]-$$
$$\left[(15i+32)+\left(2-\frac{3}{2}i\right)\right]-\left(4i+\frac{25}{4}\right)$$

oder nach den Antworten auf die Fragen 26 und 29:

$$= 7i+(2-18i)-$$
$$\left(34+13\frac{1}{2}i\right)-\left(6\frac{1}{4}+4i\right)$$

oder:

$$=\left(2-34-6\frac{1}{4}\right)+\left(7-18-13\frac{1}{2}-4\right)i$$

d. i.:

$$= -38\frac{1}{4}-28\frac{1}{2}i$$
$$= -\left(38\frac{1}{4}+28\frac{1}{2}i\right)$$

---

g) $(2+\sqrt{-9})-\left\{(1-\sqrt{-144})+[(2+\sqrt{-100})-(3-\sqrt{-169})]+(4+\sqrt{-576})\right\}$
$-\left\{(5-\sqrt{-4})-[(6+\sqrt{-36})-(7-\sqrt{-400})]+(8+\sqrt{-196})\right\}$

g) Es gibt nach dem Ausziehen der Wurzeln:

$$(2+\sqrt{-9})-\left\{(1-\sqrt{-144})+[(2+\sqrt{-100})-(3-\sqrt{-169}]+(4+\sqrt{-576})\right\}$$
$$-\left\{(5-\sqrt{-4})-[(6+\sqrt{-36})-(7-\sqrt{-400})]+(8+\sqrt{-196})\right\}$$
$$=(2+3i)-\left\{(1-12i)+[(2+10i)-(3-13i)]+(4+24i)\right\}$$
$$-\left\{(5-2i)-[(6+6i)-(7-20i)]+(8+14i)\right\}$$

oder nach Auflösung der runden Klammern

$$=2+3i-\left\{1-12i+[2+10i-3+13i]+4+24i\right\}$$
$$-\left\{5-2i-[6+6i-7+20i]+8+14i\right\}$$

oder kürzer:

$$=2+3i-\left\{5+12i+[-1+23i]\right\}-\left\{13+12i-[-1+26i]\right\}$$

sodann nach Auflösung der eckigen Klammern

$$=2+3i-\left\{5+12i-1+23i\right\}-\left\{13+12i+1-26i\right\}$$

und nach Vereinigung der Glieder in den Klammern:

$$= 2 + 3i - \{4 + 35i\} - \{14 - 14i\}$$

endlich nach Auflösung der letzten Klammern:

$$= 2 + 3i - 4 - 35i - 14 + 14i \quad \text{(nach Erkl. 28 a)}$$

d. i.:

$$= -16 - 18i$$

oder:

$$= -2 \cdot (8 + 9i) \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 19. Es sind die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $$\left(\sqrt{121} + \sqrt{-289}\right) + \left(\sqrt[3]{729} - 2 \cdot \sqrt{-256}\right) + \left(i \cdot \sqrt{-225} - i \cdot \sqrt{324}\right)$$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, a).

b) $$\left(2 \cdot \sqrt[3]{125} + 3 \cdot \sqrt{-16}\right) - \left(-\frac{i}{3} \cdot \sqrt{-729} + \sqrt{-121}\right)$$

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, e).

c) $$\left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{4}a^2b^4} + 3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{27}a^6}\right) + \left(4 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^6}{64}} + a \cdot \sqrt{-b^4}\right)$$

c) Auflösung mit Hilfe der Antwort auf Frage 32 durchzuführen.

d) $$\left(0{,}45 + \sqrt{-3{,}61}\right) - \left(\frac{9}{20} - 1{,}9\,i\right)$$

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, d).

e) $$\sqrt{-\frac{9}{25}} - \left[\left(5 - \sqrt{-\frac{1}{4}}\right) - \left(\sqrt{-12\frac{1}{4}} + 4 \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)\right]$$
$$- \left[\left(3 \cdot \sqrt[4]{81} + \sqrt{-2\frac{14}{25}}\right) - \left(\sqrt{-3\frac{1}{16}} + 2\right)\right]$$

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, f).

f) $$\left(3 + \sqrt{-400}\right) - \Big\{\left(4 - \sqrt{-256}\right) + \left[\left(5 + \sqrt{-1296}\right) - \left(6 - \sqrt{-900}\right)\right]$$
$$- \left[\left(7 - \sqrt{-625}\right) + \left(8 + \sqrt{-441}\right)\right] - \left(9 - \sqrt{-529}\right)\Big\}$$

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, g).

g) $$\left(-\sqrt[3]{-\frac{343x^3}{y^6z^9}} + 2x \cdot \sqrt{-144y^2z^2}\right) + \left(\frac{7x}{y^2z^3} + 24x^3y^2i \cdot \sqrt{-\frac{z^2}{x^4z^2}}\right)$$

g) Auflösung mit Hilfe der Antwort auf Frage 27 durchzuführen.

---

b) Ueber das Multiplizieren.

Frage 33. Wie werden zwei komplexe Zahlen miteinander multipliziert?

Antwort. Man erhält (nach Erkl. 36) für:

$$(a + bi) \cdot (\alpha + \beta i) = a\alpha + bi\alpha + a\beta i + b\beta i^2$$

oder, weil $i^2 = -1$ ist:

$$= (a\alpha - b\beta) + (\alpha b + a\beta) \cdot i$$

Hieraus ergeben sich die Sätze:

1) „Zwei komplexe Zahlen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Komplexen mit jedem Gliede der anderen multipliziert und die Produkte addiert."

2) „Das Produkt zweier komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl."

Erkl. 61. Da sich imaginäre Zahlen mit reellen multiplizieren lassen (vergl. Erkl. 34), so lässt sich das Produkt zweier komplexen Zahlen nach der für das Produkt zweier mehrgliedrigen Grössen aufgestellten Regel entwickeln.

Erkl. 61a. Die allgemeine Formel des Produktes zweier komplexen Zahlen lautet:

$$(\pm a \pm bi) \cdot (\pm \alpha \pm \beta i) = (\pm a\alpha \mp b\beta) + (\pm \alpha b \pm a\beta) \cdot i$$

Erkl. 62. Sollen mehr als zwei komplexe Zahlen miteinander multipliziert werden, so multipliziere man zuerst irgend zwei derselben und die sich hieraus ergebende Komplexe mit der dritten u. s. f.

Frage 34. Wie wird eine Komplexe mit irgend einer

a) reellen,

b) imaginären

Zahl multipliziert?

Antwort. Eine komplexe Zahl wird mit irgend einer (reellen oder imaginären) Zahl multipliziert, indem man jedes Glied der Komplexen mit der Zahl multipliziert. (Dies folgt aus Erkl. 34.)

Es gibt:

$$(a + bi) \cdot \alpha = a \cdot \alpha + \alpha bi$$

und

$$(a + bi) \cdot \beta i = a\beta i + b\beta i^2 = a\beta i - b\beta$$

Erkl. 63. Das gleiche Resultat wie in nebenstehender Antwort erhält man, wenn man in dem Produkte $(a + bi) \cdot (\alpha + \beta i)$ für $\beta = 0$, bezw. für $\alpha = 0$ setzt. Ist $\beta = 0$, so ergibt sich:

$$(a + bi) \cdot (\alpha + \beta i) = (a + bi) \cdot \alpha$$
$$= (a\alpha - b \cdot 0) + \alpha b + a \cdot 0) i$$

(nach Antwort auf Frage 33)

oder:

$$= a\alpha + \alpha bi$$

Ist $\alpha = 0$, so erhält man:

$$(a + bi) \cdot (\alpha + \beta i) = (a + bi) \cdot \beta i$$
$$= (a \cdot 0 - b\beta) + (0 \cdot b + a\beta) i$$

oder:

$$= -b\beta + a\beta i$$

Frage 35. Was erhält man für das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Es ist:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = (a \cdot a + b \cdot b) + (ab - ab) i$$

oder:

$$= a^2 + b^2$$

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

1) „Das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen ist reell."

Erkl. 64. Dasselbe Resultat wie in nebenstehender Antwort erhält man bei Anwendung der Erkl. 37. Hiernach gibt:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2$$
$$= a^2 + b^2$$

Erkl. 65. Die reelle, durch $(a+bi)$ und $(a-bi)$ teilbare, stets positive Zahl (a^2+b^2) wird nach Gauss (Theor. resid. biqu. 30) die „Norm" der Komplexen $(a+bi)$ bezw. $(a-bi)$ genannt. Die positive Quadratwurzel aus dem Produkte zweier konjugierten komplexen Zahlen wird nach Cauchy (Anal. algèbr.) mit dem Worte „Modulus" oder „Modul" bezeichnet. Der Modul der komplexen Zahlen $(a+bi)$ bezw. $(a-bi)$ ist demnach $\sqrt{a^2+b^2}$. (Vergl. auch Antwort auf Frage 55.)

Erkl. 66. Die Norm ist gleich dem Quadrate des Modulus.

Erkl. 67. Da die Norm von $(a+bi)$ gleich (a^2+b^2) und die von $(a-bi)$ ebenfalls gleich (a^2+b^2) ist (nach Erkl. 65), so ist die Norm des Produktes von $(a+bi)\cdot(a-bi)$ gleich $(a^2+b^2)\cdot(a^2+b^2)=(a^2+b^2)^2$. Allgemein erhält man als Norm des Produktes der beiden Komplexen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$ die Zahl $(a\cdot\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2$ (siehe Antwort auf Frage 33). Denn setzt man hierin für $\alpha=a$ und für $\beta=-b$, so erhält man:

$$(a^2+b^2)^2+(ab-ab)^2=(a^2+b^2)^2$$

wie vorher für die Norm von $(a+bi)\cdot(a-bi)$.

Erkl. 68. Die Worte „Norm" und „Modulus" stammen aus dem Lateinischen. Ersteres bedeutet „Richtschnur", letzteres „Maass".

(Vergl. auch Teil C.)

2) „Das Produkt zweier konjugierten Zahlen ist gleich ihrer Norm (oder gleich dem Quadrate ihrer Moduln)."

Frage 36. Was erhält man für das Produkt zweier associierten komplexen Zahlen?

Antwort. Man erhält für:

$$(a+bi)\cdot(-a-bi)=-a^2-abi-abi-b^2i^2$$

oder, da $i^2=-1$ ist:

$$=-a^2-2abi+b^2$$

Frage 37. Was gibt die Norm (der Modulus) des Produktes zweier (oder auch beliebig vieler) komplexen Zahlen?

Erkl. 69. Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe ihrer Quadrate, vermehrt um das doppelte Produkt der beiden Zahlen.

In Zeichen:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

Erkl. 70. Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe ihrer Quadrate, vermindert um das doppelte Produkt der beiden Zahlen.

In Zeichen:

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

Antwort. Die Norm des Produktes der beiden komplexen Zahlen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$ ist nach Erkl. 67 die reelle Zahl:

$$(a\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2$$

Löst man die Quadrate auf, so ergibt sich:

$$(a\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2=a^2\alpha^2+b^2\beta^2-2a\alpha b\beta+\alpha^2b^2+a^2\beta^2+2a\alpha b\beta$$

(nach den Erkl. 69 und 70)

oder:

$$=(a^2\alpha^2+\alpha^2b^2)+(a^2\beta^2+b^2\beta^2)$$

oder nach Erkl. 26:

$$=\alpha^2\cdot(a^2+b^2)+\beta^2\cdot(a^2+b^2)$$

d. i.:

$$=(a^2+b^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)$$

Erkl. 71. Das in der Antwort auf Frage 37 entwickelte Gesetz lässt sich auf jedes Produkt von zwei, die Summe zweier Quadrate darstellenden Zahlen anwenden; dieses Produkt wird immer gleich der Summe zweier Quadrate sein; z. B. gibt:

$$(5^2+6^2)\cdot(4^2+3^2) = (5\cdot4-6\cdot3)^2 + (4\cdot6+5\cdot3)^2 = 2^2+39^2$$

denn:

$$2^2+39^2 = 4+1521 = 1525$$

Dasselbe erhält man aber auch auf folgendem, einfacherem Wege. Es ist:

$$(5^2+6^2)\cdot(4^2+3^2) = (25+36)\cdot(16+9) = 61\cdot25 = 1525$$

Hieraus folgt der Satz:

„Die Norm des Produktes zweier (oder beliebig vieler) komplexen Zahlen ist gleich dem Produkte aus den Normen der einzelnen Faktoren."

[Auf gleiche Weise erhält man auch für den Modulus des Produktes der Komplexen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$:

$$\sqrt{(a\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

In Worten:

„Der Modulus des Produktes zweier (oder beliebig vieler) komplexen Zahlen ist gleich dem Produkte aus den Moduln der einzelnen Faktoren."]

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 20. Nachstehende Produkte sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(18-i\sqrt{3})\cdot\sqrt{-27}$

Auflösungen.

a) Nach der Antwort auf Frage 34 erhält man für:

$$(18-i\sqrt{3})\cdot\sqrt{-27} = 18i\sqrt{27}-i^2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$$

oder, wenn man den Radikandus 27 in zwei Faktoren so zerlegt, dass wenigstens die Wurzel gezogen werden kann, und die Erkl. 9 berücksichtigt:

$$= 18i\cdot\sqrt{9\cdot3}-i^2\cdot\sqrt{81}$$

d. i.:

$$= 54i\sqrt{3}+9$$

weil $i^2=-1$ ist.

b) $(9-\sqrt{-144})\cdot(3+5i)$

b) Für:

$$(9-\sqrt{-144})\cdot(3+5i)$$

kann man auch schreiben:

$$(9-12i)\cdot(3+5i)$$

und dieses Produkt gibt nach der Antwort auf Frage 33:

$$= 9\cdot3-12i\cdot3+9\cdot5i-12i\cdot5i = (27+60)+(-36+45)i$$

d. i.:

$$= 87+9i$$

c) $4\cdot\sqrt{-2{,}25}\cdot(3i\cdot\sqrt{-2{,}56}-2\cdot\sqrt{-2{,}89})$

c) Nach Absonderung der imaginären Einheit erhält man für:

$$4\cdot\sqrt{-2{,}25}\cdot(3i\cdot\sqrt{-2{,}56}-2\cdot\sqrt{-2{,}89}) = 4i\cdot\sqrt{2{,}25}\cdot(3i^2\cdot\sqrt{2{,}56}-2i\cdot\sqrt{2{,}89})$$

und wenn man die Wurzeln zieht und nach der Antwort auf Frage 34 ausmultipliziert:

$$= 4 \cdot 1{,}5 \cdot 3 \cdot 1{,}6 \cdot i^3 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot 2 \cdot 1{,}7 \cdot i^2 =$$

$$28{,}8\, i^3 - 20{,}4\, i^2$$

oder, weil $i^2 = -1$ und $i^3 = -i$ ist (siehe Antwort auf Frage 5):

$$= 20{,}4 - 28{,}8\, i$$

d) $(3 \cdot \sqrt{9} - 6\, i^2 \cdot \sqrt{-1}) \cdot (\sqrt[4]{81} + \sqrt{-49})$

d) Es gibt:

$$(3 \cdot \sqrt{9} - 6\, i^2 \cdot \sqrt{-1}) \cdot (\sqrt[4]{81} + \sqrt{-49}) = (9 - 6\, i^3) \cdot (3 + 7\, i)$$

oder, weil $i^3 = -i$ ist:

$$= (9 + 6\, i) \cdot (3 + 7\, i)$$

Nach der Antwort auf Frage 33 erhält man aber für:

$$(9 + 6\, i) \cdot (3 + 7\, i) = (9 \cdot 3 - 6 \cdot 7) + (3 \cdot 6 + 9 \cdot 7)\, i$$

$$= (27 - 42) + (18 + 63)\, i$$

d. i.:

$$= -15 + 81\, i$$

e) $\left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{6{,}25} + \sqrt{-\frac{1{,}96}{a^2}}\right) \cdot \left(5 \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} - \frac{7}{a} \cdot \sqrt{-0{,}04}\right)$

e) Zunächst erhält man nach der Absonderung der imaginären Einheit und nach dem Wurzelziehen für:

$$\left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{6{,}25} + \sqrt{-\frac{1{,}96}{a^2}}\right) \cdot \left(5 \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} - \frac{7}{a} \cdot \sqrt{-0{,}04}\right) = \left(\frac{2{,}5\, b}{a} + \frac{1{,}4\, i}{a}\right) \cdot \left(\frac{5\, b}{a} - \frac{1{,}4\, i}{a}\right)$$

also zwei **konjugierte** komplexe Zahlen.

Ihr Produkt gibt nach der Antwort auf Frage 35:

$$= \left(\frac{2{,}5\, b}{a}\right)^2 + \left(\frac{1{,}4}{a}\right)^2$$

oder:

$$= \frac{6{,}25\, b^2}{a^2} + \frac{1{,}96}{a^2}$$

oder nach Erkl. 26:

$$= \frac{1}{a^2} \cdot (6{,}25\, b^2 + 1{,}96)$$

f) $\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}\right)$

f) Nach der Antwort auf Frage 33 gibt:

$$\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}\right)$$

$$= +\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-\frac{3}{4}} - \left(\sqrt{-\frac{3}{4}}\right)^2$$

oder:

$$= +\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = +1$$

g) $\left(2i \cdot \sqrt{5\frac{1}{7}} - 3 \cdot \sqrt{-7} - 4i \cdot \sqrt{-343}\right) \cdot \left(\sqrt{7} - i\sqrt{5\frac{1}{7}}\right)$

g) Man erhält nach Erkl. 35 für:

$$\left(2i \cdot \sqrt{5\frac{1}{7}} - 3 \cdot \sqrt{-7} - 4i \cdot \sqrt{-343}\right) \cdot \left(\sqrt{7} - i\sqrt{5\frac{1}{7}}\right)$$

$$= 2i \cdot \sqrt{5\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{7} - 3i\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$$

$$- 4i^2 \cdot \sqrt{343} \cdot \sqrt{7} - 2 \cdot \sqrt{5\frac{1}{7}} \cdot i^2 \cdot \sqrt{5\frac{1}{7}}$$

$$+ 3 \cdot \sqrt{5\frac{1}{7}} \cdot i^2 \cdot \sqrt{7} + 4i^3 \cdot \sqrt{5\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{343}$$

oder nach Erkl. 9:

$$= 2i \cdot \sqrt{\frac{36}{7} \cdot 7} - 3i \cdot \sqrt{7^2} - 4i^2 \cdot \sqrt{2401} - 2i^2 \cdot \sqrt{\left(5\frac{1}{7}\right)^2}$$

$$+ 3i^2 \cdot \sqrt{\frac{36}{7} \cdot 7} + 4i^3 \cdot \sqrt{\frac{36}{7} \cdot 343}$$

oder, wenn man die Wurzeln zieht und für $i^2 = -1$ und $i^3 = -i$ setzt:

$$= 12i - 21i + 196 + 10\frac{2}{7} - 18 - 168i$$

oder vereinigt:

$$= 188\frac{2}{7} - 177i$$

---

h) $(x - y - zi) \cdot (-x - y + zi)$

h) Wenn man die erste Klammer zunächst nur mit dem ersten Gliede der zweiten multipliziert, so erhält man:

$$(x - y - zi) \cdot (-x) = -x^2 + xy + xzi$$

(nach Antwort auf Frage 34)

und wenn man die erste Klammer nur mit dem zweiten Gliede der zweiten multipliziert:

$$(x - y - zi) \cdot (-y) = -xy + y^2 + yzi$$

und wenn man sie schliesslich nur mit dem letzten Gliede multipliziert:

$$(x - y - zi) \cdot (+zi) = xzi - yzi + z^2$$

Folglich gibt:

$$(x - y - zi) \cdot (-x + y + zi) = -x^2 + xy + xzi - xy + y^2 + yzi + xzi - yzi + z^2$$

oder vereinigt:

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xzi$$

---

i) $\left(\sqrt{-24} - 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} + 3i\right) \cdot \left(12 \cdot \sqrt{-\frac{1}{6}} + \sqrt{48} - 2 \cdot \sqrt{-\frac{2}{3}}\right)$

i) Nach Erkl. 36 gibt:

$$\left(\sqrt{-24} - 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} + 3i\right) \cdot \left(12 \cdot \sqrt{-\frac{1}{6}} + \sqrt{48} - 2 \cdot \sqrt{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$= 12i^2 \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} - 36i \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} + 36i^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$+ i \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{48} - 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{48} + 3i \cdot \sqrt{48}$$

$$- 2i^2 \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + 6i\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - 6i^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Erkl. 72. Man erhält für:

$\sqrt{1152} = \sqrt{579 \cdot 2} = 24 \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6 \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4 \cdot \sqrt{3}$

$6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \sqrt{\frac{4}{6}} = 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} = 12 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$

$\sqrt{2} = 1,414$

$\sqrt{\frac{1}{6}} = 0,408$

$\sqrt{3} = 1,732$

Erkl. 72a. Genügt ein nur auf 3 Dezimalstellen genaues Resultat, so ist:

$$-2 \cdot \left(8 + 9\sqrt{2} + 12\sqrt{\frac{1}{6}}\right) + 12i(-1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$$
$$-2 \cdot (8 + 12,726 + 4,896) + 12i(-1 + 2,828 + 1,732) =$$
$$-51,244 + 42,720i$$

und wenn man $i^2 = -1$ setzt und nach Erkl. 9 verfährt:

$$= -12 \cdot \sqrt{4} - 36i \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} - 36 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} + i \cdot \sqrt{1152} - 3 \cdot \sqrt{72} + 3i\sqrt{48} + 2 \cdot \sqrt{16} + 6i\sqrt{1} + 6\sqrt{\frac{2}{3}}$$

und, falls man soweit als möglich die Wurzeln zieht (siehe Erkl. 72) und für $\sqrt{1} = 1$ setzt:

$$= -24 - 18i - 36 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} + 24i\sqrt{2} - 18\sqrt{2} + 12i\sqrt{3} + 8 + 6i + 12\sqrt{\frac{1}{6}}$$

oder vereinigt:

$$= -16 - 18 \cdot \sqrt{2} - 24 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} - 12i + 24i\sqrt{2} + 12i\sqrt{3}$$

oder:

$$= -2 \cdot \left(8 + 9\sqrt{2} + 12\sqrt{\frac{1}{6}}\right) + 12i(-1 + 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3})$$

(siehe Erkl. 72a)

Aufgabe 21. Es ist die Norm und der Modulus der komplexen Zahl $3 + 4i$ zu berechnen.

Auflösung. Nach Erkl. 65 ist die Norm von $3 + 4i$ die Zahl:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = +25$$

und der Modulus die Zahl:

$$\sqrt{+25} = +5$$

weil letzterer ebenfalls stets positiv genommen werden muss. (Vergl. Abschnitt C.)

Aufgabe 22. Es ist die Norm und der Modulus des Produktes der komplexen Zahlen:

$$(2 + 2\sqrt{-3}) \text{ und } (3 - 5 \cdot \sqrt{-1})$$

zu ermitteln.

Auflösung. Nach Erkl. 67 ist die Norm von:

$$(2 + 2\sqrt{-3}) \cdot (3 - 5\sqrt{-1})$$

die reelle Zahl:

$$(2 \cdot 3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 5)^2 + (3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 5)^2$$

oder nach der Antwort auf Frage 37:

$$= [2^2 + (2 \cdot \sqrt{3})^2] \cdot [3^2 + (5)^2] = (4 + 12) \cdot (9 + 25) = 16 \cdot 34 = +544$$

und der Modulus die reelle Zahl:

$$\sqrt{+544} = 23,32 \cdots$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 23. Man soll die nachfolgenden Produkte auf ihre einfachste Form bringen:

a) $(0,2 + i\sqrt{0,01}) \cdot \sqrt{-0,09}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, a).

b) $(3-2\sqrt{-1})\cdot\left(2+3\cdot\sqrt{-\frac{1}{9}}\right)$

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, b).

c) $\left(\frac{1}{3}\cdot\sqrt{81}-i^2\cdot\sqrt{-16}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\sqrt{324}-2\cdot\sqrt{-4}\right)$

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, e).

d) $\left(-\frac{1}{3}+\sqrt{-\frac{7}{9}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}-\sqrt{-\frac{7}{9}}\right)$

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, f).

e) $\left(\sqrt{-x}+\sqrt{y}-\sqrt{-xy}-\sqrt{-\frac{x}{y}}\right)\cdot\sqrt{-xy}$

e) Auflösung nach der Antwort auf Frage 34 durchzuführen.

f) $(a-b-ci)\cdot(a+b+ci)$

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, h).

g) $\left(2\cdot\sqrt{-6}+3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-4i\right)\cdot\left(5\cdot\sqrt{-6}-7\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}+10i\right)$

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, i).

(Für $\sqrt{+1}$ ist $+1$ zu setzen.)

h) $(1+i)\cdot(-1-i)\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)$

h) Man multipliziere zunächst die beiden ersten Klammern und darauf die beiden letzten Klammern und schliesslich die aus beiden Produkten sich ergebenden Werte miteinander (nach der Antwort auf Frage 33) und vereinige das Gleichnamige.

Aufgabe 24. Es ist die Norm und der Modulus der komplexen Zahl:

$$14-\sqrt{-29}$$

zu berechnen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 21.

Aufgabe 25. Es ist die Norm und der Modulus des Produktes der komplexen Zahlen: $(1,5-2i)$, $(\sqrt{3}+\sqrt{-6})$ und $(-4-i\sqrt{20})$ zu ermitteln.

Andeutung. Auflösung nach der Antwort auf Frage 37 durchzuführen, wie in Aufgabe 22 gezeigt wurde.

---

c) Ueber das Dividieren.

Frage 38. Wie werden zwei komplexe Zahlen durch einander dividiert?

Erkl. 78. Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man den Zähler und Nenner desselben mit derselben Zahl multipliziert.

Antwort. Zwei komplexe Zahlen werden durch einander dividiert, indem man sowohl den Dividendus als auch den Divisor mit dem Konjugierten des letzteren multipliziert.

Erkl. 74. Die allgemeine Formel für die Division zweier komplexen Zahlen lautet:

$$\frac{\pm a \pm bi}{\pm \alpha \pm \beta i} = \frac{(\pm a\alpha \pm b\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{(\pm \alpha b \mp a\beta)i}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Hiernach ist:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{(a+bi)\cdot(\alpha-\beta i)}{(\alpha+\beta i)\cdot(\alpha-\beta i)}$$

(nach Erkl. 72)

oder:

$$= \frac{(a\alpha+b\beta)+(\alpha b-a\beta)i}{\alpha^2+\beta^2}$$

(nach den Antworten auf die Fragen 33 u. 35)

oder, falls der Quotient der beiden Komplexen als eine komplexe Zahl dargestellt werden soll:

$$= \frac{(a\alpha+b\beta)}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{(\alpha b-a\beta)i}{\alpha^2+\beta^2}$$

Frage 39. Was erhält man bei der Division zweier konjugierten komplexen Zahlen?

Erkl. 74a. Ist $(a+bi)$ der Divisor und $(a-bi)$ der Dividendus, so erhält man:

$$\frac{a-bi}{a+bi} = \frac{(a-bi)\cdot(a-bi)}{(a+bi)\cdot(a-bi)} =$$

$$\frac{a^2-b^2-2abi}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{2abi}{a^2+b^2}$$

Antwort. Man erhält für:

$$\frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)\cdot(a+bi)}{(a-bi)\cdot(a+bi)}$$

(nach Antwort auf Frage 38)

oder:

$$= \frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}$$

(nach den Erkl. 69 und 37)

oder auch:

$$= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2abi}{a^2+b^2}$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Der Quotient zweier konjugierten komplexen Zahlen ist komplex.“

Frage 40. Wie wird eine komplexe Zahl durch eine

a) reelle,

b) imaginäre

Zahl dividiert?

Erkl. 75. Dasselbe Resultat wie in nebenstehender Antwort erhält man auch aus der Antwort auf Frage 38 wie folgt.

Setzt man in $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$ für $\alpha = 0$, so erhält man für:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{a+bi}{\beta i}$$

und für die in der Antwort auf Frage 38 gegebene Lösung:

$$\frac{(a\alpha+b\beta)+(\alpha b-a\beta)i}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{(0+b\beta)+(0-a\beta)i}{0+\beta^2}$$

d. i.:

$$= \frac{b\beta}{\beta^2} - \frac{a\beta i}{\beta^2}$$

oder:

$$= \frac{b}{\beta} - \frac{ai}{\beta}$$

Antwort. Eine komplexe Zahl wird durch eine (reelle oder imaginäre) Zahl dividiert, indem man sowohl das reelle als auch das imaginäre Glied der Komplexen durch die Zahl dividiert.

Es ist hiernach:

$$\frac{a+bi}{\alpha} = \frac{a}{\alpha} + \frac{bi}{\alpha}$$

und

$$\frac{a+bi}{\beta i} = \frac{a}{\beta i} + \frac{bi}{\beta i}$$

oder:

$$= -\frac{ai}{\beta} + \frac{b}{\beta}$$

weil $\frac{1}{i} = -i$ (nach Antwort auf Frage 4a) ist.

Setzt man dagegen $\beta = 0$, so gibt:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{a+bi}{\alpha}$$

und

$$\frac{(a\alpha+b\beta)+(\alpha b-a\beta)i}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{(a\alpha+0)+(\alpha b-0)i}{\alpha^2+0}$$

d. i.:

$$= \frac{a\alpha}{\alpha^2} - \frac{\alpha b i}{\alpha^2}$$

oder:

$$= \frac{a}{\alpha} + \frac{bi}{\alpha}$$

Frage 41. Wie wird eine (reelle oder imaginäre) Zahl durch eine komplexe Zahl dividiert?

Antwort. Eine (reelle oder imaginäre) Zahl wird durch eine komplexe Zahl dividiert, indem man erstere mit dem Konjugierten der gegebenen Komplexen multipliziert und durch die Norm der letzteren dividiert.

Denn es ist:

$$\frac{a}{\alpha+\beta i} = \frac{a\cdot(\alpha-\beta i)}{(\alpha+\beta i)\cdot(\alpha-\beta i)} \text{ (nach Erkl. 73)}$$

oder:

$$= \frac{a\alpha - a\beta i}{\alpha^2+\beta^2}$$

ferner:

$$\frac{bi}{\alpha+\beta i} = \frac{bi\cdot(\alpha-\beta i)}{(\alpha+\beta i)\cdot(\alpha-\beta i)} = \frac{\alpha b i + b\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Erkl. 76. Zu dem gleichen Ergebnis wie in nebenstehender Antwort gelangt man auch, wenn man in:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{(a\alpha+b\beta)+(\alpha b-a\beta)i}{\alpha^2+\beta^2}$$

(siehe Antwort auf Frage 38)

$a = 0$, bezw. $b = 0$ setzt. Ist $a = 0$, so erhält man:

$$\frac{bi}{\alpha+\beta i} = \frac{(0+b\beta)+(\alpha b-0)i}{\alpha^2+\beta^2}$$

d. i.:

$$= \frac{b\beta+\alpha b i}{\alpha^2+\beta^2}$$

Ist $b = 0$, so ergibt sich:

$$\frac{a}{\alpha+\beta i} = \frac{(a\alpha+0)+(0-a\beta)i}{\alpha^2+\beta^2}$$

d. i.:

$$= \frac{a\alpha - a\beta i}{\alpha^2+\beta^2}$$

Frage 42. Was erhält man für das Reciproke einer komplexen Zahl?

Antwort. Es gibt nach dem in voriger Antwort aufgeführten Satz:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

(siehe Erkl. 15)

und

$$\frac{1}{a-bi} = \frac{a+bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a+bi}{a^2+b^2}$$

In Worten:

„Das Reciproke einer komplexen Zahl ist gleich dem Konjugierten der letzteren, dividiert durch ihre Norm.“

Frage 43. Was gibt das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen, dividiert durch die Norm der einen von beiden?

Antwort. Man erhält für:

$$\frac{(a+bi)\cdot(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}$$

(nach Antwort auf Frage 35)

oder:

$$= 1$$

In Worten:

„Das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen, dividiert durch die Norm der einen von beiden, gibt 1.“

Frage 44. Was gibt die Norm des Quotienten zweier komplexen Zahlen?

Erkl. 77. Auf gleiche Weise, wie in nebenstehender Antwort gezeigt wurde, erhält man auch für den Modulus des Quotienten zweier komplexen Zahlen $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$ die reelle Zahl:

$$\sqrt{\frac{(a\cdot\alpha+b\beta)^2+(\alpha b-a\beta)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{\alpha^2+\beta^2}}$$

In Worten:

„Der Modulus des Quotienten zweier komplexen Zahlen ist gleich dem Quotienten aus ihren Moduln.“

Antwort. Die Norm des Quotienten zweier komplexen Zahlen $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$ ist die reelle Zahl:

$$\frac{(a\alpha+b\beta)^2+(\alpha b-a\beta)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}$$

Berechnet man die Quadrate nach den in den Erkl. 69 und 70 aufgeführten Sätzen, so erhält man:

$$= \frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+2a\alpha b\beta+\alpha^2b^2+a^2\beta^2-2a\alpha b\beta}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

oder vereinigt:

$$= \frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+\alpha^2b^2+a^2\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

oder nach Erkl. 26:

$$= \frac{a^2(\alpha^2+\beta^2)+b^2\cdot(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$= \frac{(a^2+b^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

d. i.:

$$= \frac{a^2+b^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

Hieraus folgt der Satz:

„Die Norm des Quotienten zweier komplexen Zahlen ist gleich dem Quotienten ihrer Normen.“

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 26. Es sind die nachfolgenden Quotienten auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\frac{(-1+7i)}{(1+3i)}$

Auflösungen.

a) Nach der Antwort auf Frage 38 erhält man für:

$$\frac{(-1+7i)}{(1+3i)} = \frac{(-1+7i)\cdot(1-3i)}{(1+3i)\cdot(1-3i)}$$

Führt man nach den Antworten auf die Fragen 33 und 35 die Multiplikationen aus, so ergibt sich:

$$= \frac{-1+7i+3i+21}{1^2+3^2}$$

oder vereinigt:

$$= \frac{20+10i}{10} = 2+i$$

---

b) $\frac{4-6\cdot\sqrt{-1}}{+1+\sqrt{-1}}$

b) Es gibt:

$$\frac{4-6\cdot\sqrt{-1}}{+1+\sqrt{-1}} = \frac{(4-6i)\cdot(+1-i)}{(+1+i)\cdot(+1-i)}$$

$$= \frac{4-6i-4i-6}{1^2+1^2} = \frac{-2-10i}{2}$$

d. i.:

$$= -1-5i$$

oder:

$$= -(1+5i)$$

---

c) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-3}}{\sqrt{2}-\sqrt{-3}}$

Erkl. 78. Für:

$$-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\sqrt{6}$$

erhält man auf 4 Dezimalstellen genau:

$$= -0{,}2000+0{,}9796i$$

c) Man erhält für:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-3}}{\sqrt{2}-\sqrt{-3}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{-3})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{-3})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{-3})}$$

(nach Antwort auf Frage 38)

oder:

$$= \frac{2+2i\sqrt{6}-3}{2+3}$$

(nach Erkl. 69 und Antwort auf Frage 35)

d. i.:

$$= \frac{-1+2i\sqrt{6}}{5}$$

oder:

$$= -\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\sqrt{6}$$

(siehe Erkl. 78)

---

d) $\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}}$

d) Der **erste** Summand gibt:

$$\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}} = \frac{(a+\sqrt{-b})\cdot(a+\sqrt{-b})}{(a-\sqrt{-b})\cdot(a+\sqrt{-b})} = \frac{a^2+2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}$$

(nach Erkl. 69 und Antwort auf Frage 35)

und der **zweite** Summand:

$$\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}} = \frac{(a-\sqrt{-b})\cdot(a-\sqrt{-b})}{(a+\sqrt{-b})\cdot(a-\sqrt{-b})} = \frac{a^2-2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}$$

(nach Erkl. 70 und 37)

Folglich erhält man für:

$$\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}} = \frac{a^2+2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}+\frac{a^2-2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}$$

oder, weil beide Brüche denselben Nenner haben:

$$= \frac{a^2+2ai\sqrt{b}-b+a^2-2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b} = \frac{2a^2+2b}{a^2+b} = \frac{2\cdot(a^2-b)}{a^2+b}$$

---

e) $\frac{(5 \cdot \sqrt{4} + \sqrt{-100}) \cdot (2i^2 \cdot \sqrt{-25} - 10i\sqrt{-1})}{10 \cdot \sqrt{2}}$

e) Sondert man die imaginäre Einheit ab und zieht man soweit als möglich die Wurzeln, so erhält man für:

$$\frac{(5 \cdot \sqrt{4} + \sqrt{-100}) \cdot (2i^2 \cdot \sqrt{-25} - 10i\sqrt{-1})}{10 \cdot \sqrt{2}} = \frac{(5 \cdot 2 + 10i) \cdot (2 \cdot 5 \cdot i^3 - 10i^2)}{10\sqrt{2}}$$

oder, weil $i^3 = -i$ ist (siehe Frage 5):

$$= \frac{(10 + 10i) \cdot (10 - 10i)}{10 \cdot \sqrt{2}}$$

und, wenn man den Zähler nach der Antwort auf Frage 35 ausmultipliziert:

$$= \frac{100 + 100}{10 \cdot \sqrt{2}} \text{ oder } = \frac{20}{\sqrt{2}}$$

oder:

$$= \frac{20 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = 10 \cdot \sqrt{2}$$

---

f) $\frac{4 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{-10}}{(-2i)}$

f) Nach der Antwort auf Frage 40 gibt:

$$\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{-10}}{(-2i)} = -\frac{2\sqrt{2}}{i} + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

oder:

$$= +2i\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

weil $\frac{1}{i} = -i$ ist (siehe Erkl. 78a).

Erkl. 78a. Auf 3 Dezimalstellen genau gibt:

$$+2i\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{10} = +2 \cdot 1{,}414 \cdot i + \frac{1}{2} \cdot 3{,}162$$
$$= 2{,}828i + 1{,}581$$

---

g) $\frac{49}{(-2 + 3\sqrt{-5})}$

g) Es ist:

$$\frac{49}{(-2 + 3\sqrt{-5})} = \frac{49 \cdot (-2 - 3\sqrt{-5})}{(-2 + 3\sqrt{-5}) \cdot (-2 - 3\sqrt{-5})}$$

[nach Antwort auf Frage 41, a)]

oder:

$$= \frac{49 \cdot (-2 - 3\sqrt{-5})}{+4 + 45}$$

(nach Antwort auf Frage 35)

oder:

$$= -(2 + 3\sqrt{5})$$

---

h) $\frac{6 \cdot \sqrt{-1}}{\left(8i \cdot \sqrt{-\frac{1}{4}} - 9 \cdot \sqrt{-\frac{1}{81}}\right)}$

h) Man erhält für:

$$\frac{6 \cdot \sqrt{-1}}{\left(8i \cdot \sqrt{-\frac{1}{4}} - 9 \cdot \sqrt{-\frac{1}{81}}\right)} = \frac{6i}{-4 - i}$$

wenn man die imaginäre Einheit absondert und die Wurzeln zieht. Nach Antwort auf Frage 41, b) gibt:

$$\frac{6i}{-4 - i} = \frac{6i \cdot (-4 + i)}{(-4 - i) \cdot (-4 + i)} = \frac{-24i - 6}{16 + 1} = -1\frac{7}{17}i - \frac{6}{17}$$

---

i) $\frac{12 - \sqrt{18} - (2\sqrt{3} + 3\sqrt{6})i}{2 - i\sqrt{6}}$

i) Zunächst gibt:

$$\frac{12 - \sqrt{18} - (2\sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{6})i}{2 - i\sqrt{6}} = \frac{(12 - \sqrt{18} - 2i\sqrt{3} - 3i\sqrt{6})(2 + i\sqrt{6})}{(2 - i\sqrt{6}) \cdot (2 + i\sqrt{6})}$$

(nach Antwort auf Frage 38)

oder ausmultipliziert:

$$= \frac{24 - 2\sqrt{18} - 4i\sqrt{3} - 6i\sqrt{6} + 12i\sqrt{6} - i\sqrt{108} + 2\sqrt{18} + 18}{4 + 6}$$

oder vereinigt:

$$= \frac{42 - 10i\sqrt{3} + 6i\sqrt{6}}{10}$$

oder:

$$= 4\frac{1}{5} - i\sqrt{3} + \frac{3}{5}i\sqrt{6} = 4\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i\sqrt{3} \cdot (5 - 3\sqrt{2})$$

(siehe Erkl. 78b)

Erkl. 78b. Man erhält für:

$$\frac{1}{5}i\sqrt{3} \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{2}) = \frac{1}{5} \cdot i \cdot 1{,}732 \cdot (5 - 3 \cdot 1{,}414)$$

oder:

$$= 0{,}2 \cdot 1{,}732 \cdot 0{,}758 \cdot i = 0{,}263\,i$$

Demnach gibt auf 3 Dezimalstellen genau:

$$4\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i\sqrt{3}(5 - 3\sqrt{2}) = 4{,}2 - 0{,}263\,i$$

---

k) $\frac{9 \cdot \sqrt{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{-27} + \frac{1}{2}i\sqrt{-24} - 3 \cdot \sqrt{-3}}$

k) Der Dividendus:

$$9 \cdot \sqrt{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

gibt:

$$= 3 \cdot \sqrt{-\frac{2}{3} \cdot 3^2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

wenn man von 9 den Faktor 3 unter die Wurzel bringt (nach Erkl. 32), oder:

$$= 3i\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

oder (nach Erkl. 26), weil $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ (siehe Erkl. 9) ist:

$$= \sqrt{3} \cdot \left(3i\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)$$

und der Divisor:

$$2\sqrt{-27} + \frac{1}{2}i\sqrt{-24} - 3\sqrt{-3}$$

wenn man 27 in die Faktoren 3·9 und 24 in 4·6 zerlegt, um wenigstens teilweise die Wurzeln ziehen zu können:

$$= 2 \cdot i \cdot \sqrt{9 \cdot 3} + \frac{1}{2}i^2 \cdot \sqrt{4 \cdot 6} - 3i\sqrt{3}$$

oder:

$$= 6i\sqrt{3} - \sqrt{6} - 3i\sqrt{3} = 3i\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3}(3i - \sqrt{2})$$

Mithin erhält man für:

$$\frac{9 \cdot \sqrt{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{-27} + \frac{1}{2}i\sqrt{-24} - 3 \cdot \sqrt{-3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \left(3i\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{3} \cdot (3i - \sqrt{2})} = \frac{3i\sqrt{2} - \frac{1}{4}}{3i - \sqrt{2}}$$

oder nach den Antworten auf die Fragen 38 und 35:

$$=\frac{\left(-\frac{1}{4}+3i\sqrt{2}\right)\cdot(-\sqrt{2}-9i)}{(-\sqrt{2}+9i)\cdot(-\sqrt{2}-9i)}$$

oder ausmultipliziert:

$$=\frac{+\frac{1}{4}\sqrt{2}-6i+2\frac{1}{4}i+27\sqrt{2}}{2+81}$$

oder vereinigt:

$$=\frac{27\frac{1}{4}\sqrt{2}-3\frac{3}{4}i}{83}=\frac{109}{332}\sqrt{2}-\frac{15}{332}i$$

(siehe Erkl. 78c)

Erkl. 78c. Da $\sqrt{2}=1{,}414$ ist, so erhält man für:

$$\frac{109}{332}\sqrt{2}-\frac{15}{332}i=\frac{109\cdot 1{,}414}{332}-\frac{15i}{332}$$
$$=0{,}464-0{,}045i$$

---

l) $\left[2\cdot\sqrt[3]{343}-3\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}-(7i\sqrt{3}+2\sqrt{-5})\right]:\left(14\sqrt{\frac{1}{4}}-i\sqrt{5}\right)$

Erkl. 78d. Man erhält für:

$$3\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}=\sqrt{3^2\cdot\frac{5}{3}}\text{ (nach Erkl. 32) }=\sqrt{15}$$
$$\sqrt{15}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{5^2\cdot 3}=5\cdot\sqrt{3}\text{ (nach Erkl. 9)}$$

l) Löst man nach Erkl. 28a die runde Klammer auf und zieht man soweit als möglich die Wurzeln, so ergibt sich für:

$$\left[2\cdot\sqrt[3]{343}-3\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}-(7i\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{-5})\right]:\left(14\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}-i\sqrt{5}\right)=$$
$$\left[\frac{14-\sqrt{15}-7i\sqrt{3}-2i\sqrt{5}}{7-i\sqrt{5}}\right]\text{ (siehe Erkl. 78d)}$$

und nach Antwort auf Frage 38:

$$=\frac{(14-\sqrt{15}-7i\sqrt{3}-2i\sqrt{5})\cdot(7+i\sqrt{5})}{(7-i\sqrt{5})\cdot(7+i\sqrt{5})}$$

oder ausmultipliziert:

$$=\frac{98-7\sqrt{15}-49i\sqrt{3}-14i\sqrt{5}+14i\sqrt{5}-5i\sqrt{3}+7\cdot\sqrt{15}+10}{49+5}$$

oder vereinigt:

$$=\frac{108-54i\sqrt{3}}{54}=3-i\sqrt{3}$$

Aufgabe 27. Was gibt die Norm und der Modulus des Quotienten:

$$\frac{5-\sqrt{-11}}{6+\sqrt{-13}}?$$

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 44 ist die Norm von:

$$\frac{5-\sqrt{-11}}{6+\sqrt{-13}}$$

die reelle Zahl:

$$\frac{5^2+11}{6^2+13}=+\frac{36}{49}$$

und der Modulus die reelle Zahl:

$$\sqrt{\frac{5^2+11}{6^2+13}}=\sqrt{\frac{36}{49}}=+\frac{6}{7}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 28. Es sind die nachfolgenden Quotienten auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\dfrac{2-3i}{-2+5i}$

b) $\dfrac{-3\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}}+4\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}{2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{-3}}$

c) $\dfrac{4\sqrt{8}-5\cdot\sqrt{-50}}{6\sqrt{27}+14\cdot\sqrt{-1\frac{3}{4}}}$

d) $\dfrac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}-\dfrac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}$

e) $\dfrac{(3\cdot\sqrt[3]{8}-i\sqrt{64})\cdot\left(\frac{138}{23}+8\cdot\sqrt{-1}\right)}{-\sqrt[3]{-1000000}}$

f) $\dfrac{48}{6-2\sqrt{-3}}$

g) $\dfrac{2\sqrt{-1}}{\left(3\cdot\sqrt{-\frac{1}{324}}-4i\cdot\sqrt{-\frac{1}{256}}\right)}$

h) $\dfrac{5-\sqrt{15}+(3\sqrt{3}-4\sqrt{2})i}{1+2\sqrt{-1}}$

i) $\dfrac{0{,}5\cdot\sqrt{0{,}04}-0{,}2\cdot\sqrt{-0{,}0625}}{0{,}3\cdot\sqrt{-1{,}21}+0{,}4i\cdot(\sqrt{-1{,}44}-0{,}6)}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, b).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, c). — Die Faktoren 3 und 4 sind ganz bezw. teilweise unter die Wurzelzeichen zu bringen, damit man im Zähler und Nenner gleiche Wurzeln erhält.

c) Auflösung mit Hilfe der Antwort auf die Frage 38 durchzuführen. Die Quadratwurzeln sind auf 3 Dezimalstellen genau zu berechnen.

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, d).

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, e).

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, g).

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, h).

h) Man verfahre in gleicher Weise, wie in der Auflösung von Aufgabe 26, i) angegeben wurde.

i) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, k); nur sind hier sämtliche Wurzeln rational.

Aufgabe 29. Was erhält man als Norm und als Modulus des Quotienten:

$$\frac{8+\sqrt{-17}}{6-8i}?$$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 27.

---

d) Ueber das Potenzieren.

Frage 45. Wie wird eine komplexe Zahl potenziert?

Antwort. Die Potenzierung ist eine wiederholte Multiplikation. Die Erhebung einer komplexen Zahl zu irgend einer Potenz, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist, hat daher nach den über die Multiplikation komplexer Zahlen

Erkl. 79. Jede beliebige Potenz eines Binoms lässt sich in eine Reihe entwickeln. Diese Reihe, die Formel des binomischen Lehrsatzes genannt, lautet allgemein:

$$(x \pm y)^n = x^n \pm n \cdot x^{n-1} \cdot y + \frac{n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot y^2}{1 \cdot 2} \pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} \cdot y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot x^{n-4} \cdot y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \pm \cdots$$

Für $n = 2$ gibt:

$$(x \pm y)^n = (x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

(vergl. auch die Erkl. 69 und 70)

Für $n = 3$ gibt:

$$(x \pm y)^n = (x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

(Siehe Kleyers „Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln“.)

aufgestellten Sätzen zu erfolgen, denn es ist:

$$(a \pm bi)^n = (a \pm bi) \cdot (a \pm bi) \cdot (a \pm bi) \cdots (n \text{ mal})$$

Ist der Exponent eine negative ganze Zahl, so erhält man, weil:

$$(a \pm bi)^{-n} = \left(\frac{1}{a \pm bi}\right)^n$$

ist (nach Erkl. 24), für:

$$(a \pm bi)^{-n} = \left(\frac{1}{a \pm bi}\right) \cdot \left(\frac{1}{a \pm bi}\right) \cdot \left(\frac{1}{a \pm bi}\right) \cdots (n \text{ mal})$$

welches Produkt nach den über die Division der komplexen Zahlen aufgestellten Sätzen weiter zu behandeln ist.

Wenn der Exponent eine Zahl > 2 (oder 3) ist, so gelangt man schneller zum Ziel bei Anwendung der Formeln des binomischen Lehrsatzes (siehe nebenstehende Erklärung).

Frage 46. Was erhält man für:

a) $(a \pm bi)^2$

b) $(a \pm bi)^{-2}$?

Antwort. Nach Erkl. 79 gibt:

a) $(a \pm bi)^2 = a^2 + b^2 i^2 \pm 2abi = a^2 - b^2 \pm 2abi$

b) $(a \pm bi)^{-2} = \dfrac{1}{(a \pm bi)^2} = \dfrac{1}{a^2 - b^2 \pm 2abi}$

(nach Antwort auf Frage 45)

oder:

$$= \frac{a^2 - b^2 \mp 2abi}{(a^2 - b^2 \pm 2abi) \cdot (a^2 - b^2 \mp 2abi)}$$

(nach Antwort auf Frage 42)

d. i.:

$$= \frac{a^2 - b^2 \mp 2abi}{(a^2 + b^2) \cdot (a^2 + b^2)}$$

Frage 47. Was gibt:

a) $(a \pm bi)^3$

b) $(a \pm bi)^{-3}$?

Erkl. 79a. Da $(a \pm bi)^3 = (a \pm bi)^2 \cdot (a \pm bi)$ ist (nach Erkl. 23), so erhält man auch:

$$(a \pm bi)^3 = (a^2 - b^2 \pm 2abi) \cdot (a \pm bi) = a^3 - ab^2 \pm 2a^2bi \pm a^2bi \mp b^3i + 2ab^2i^2 \text{ (nach Erkl. 36)}$$

oder vereinigt:

$$= a^3 \pm 3a^2bi - 3ab^2 \mp b^3i = (a^3 - 3ab^2) + (\pm 3a^2b \mp b^3)i$$

Antwort. Nach Erkl. 79 ist:

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

Setzt man in diese Gleichung für $x = a$ und für $y = bi$ ein, so erhält man:

a) $(a \pm bi)^3 = a^3 \pm 3a^2bi + 3ab^2i^2 \pm b^3i^3$

oder, weil $i^2 = -1$ und $i^3 = -i$ ist (siehe Frage 5):

$$= a^3 \pm 3a^2bi - 3ab^2 \mp b^3i = (a^3 - 3ab^2) + (\pm 3a^2b \mp b^3) \cdot i$$

b) $(a \pm bi)^{-3} = \dfrac{1}{(a \pm bi)^3} = \dfrac{1}{(a^3 - 3ab^2) + (\pm 3a^2b \mp b^3)i}$

Frage 48. Was erhält man für $(a \pm bi)^n$, wenn n eine

a) positive, ganze und reelle Zahl,

b) negative, ganze und reelle Zahl

ist?

Antwort. Setzt man in die Formel des binomischen Lehrsatzes (siehe Erkl. 79) für $x = a$ und für $y = bi$ ein, so erhält man:

$$\text{a)}\quad (a \pm bi)^n = a^n \pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \cdot i + \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} \cdot b^2 i^2}{1 \cdot 2}$$
$$\pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} \cdot b^3 \cdot i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a^{n-4} b^4 i^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \pm \cdots$$

oder, weil $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ ist:

$$= a^n \pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \cdot i - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} b^2}{1 \cdot 2} \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)\, a^{n-3} \cdot b^3 i}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a^{n-4} \cdot b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \pm \cdots$$

oder, wenn man den Wert der Potenz in einen reellen und in einen mit i multiplizierten Teil zerlegt:

$$= a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} \cdot b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)\, a^{n-4} b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots$$
$$+ \left[\pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \pm \cdots\right] \cdot i$$

Hierin gelten alle oberen Zeichen für $(a + bi)^n$, alle unteren für $(a - bi)^n$.

$$\text{b)}\quad (a \pm bi)^{-n} = \frac{1}{(a \pm bi)^n}$$
$$= 1 : \left\{a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a^{n-4} b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots\right.$$
$$\left. + \left[\pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \pm \cdots\right] \cdot i\right\}$$

Hieraus folgt der Satz:

„Ist der Exponent eine gerade oder ungerade, positive oder negative, ganze und reelle Zahl, so erhält man für die Potenz einer komplexen Zahl wiederum eine Komplexe.“

Frage 49. Was erhält man für die Summe zweier, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Nach voriger Antwort gibt:

$$(a + bi)^n = a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} \cdot b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)\, a^{n-4} b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots$$
$$+ \left(+ n \cdot a^{n-1} \cdot b - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} \cdot b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\right) \cdot i$$

und

$$(a - bi)^n = a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} \cdot b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)\, a^{n-4} b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots$$
$$+ \left(- n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} \cdot b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots \right) \cdot i$$

Folglich gibt:

$$(a + bi)^n + (a - bi)^n = 2 \cdot \left[a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a^{n-4} b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right.$$
$$\left. - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)\, a^{n-6} b^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots \right]$$

weil sich die imaginären Teile fortheben

Hieraus folgen die Sätze:

1) „Werden zwei konjugierte komplexe Zahlen auf denselben Grad potenziert, so erhält man wiederum zwei konjugierte Komplexe.“

2) „Die Summe von zwei, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen ist reell.“

Frage 50. Was erhält man für die Differenz von zwei, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Man erhält für:

$$(a + bi)^n - (a - bi)^n = a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} \cdot b^3}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^{n-4} \cdot b^4 - \cdots$$
$$+ \left[n \cdot a^{n-1} b - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \cdots \right] \cdot i - a^n$$
$$+ \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} \cdot b^2}{1 \cdot 2} - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a^{n-4} \cdot b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$
$$- \left[- n \cdot a^{n-1} b + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-3} b^3 - \cdots \right] \cdot i$$

(nach den Antworten auf die Fragen 48 und 49)

oder vereinigt:

$$= 2i \cdot \left[n \cdot a^{n-1} \cdot b - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} \cdot b^3 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} \cdot b^5 - \cdots \right]$$

In Worten:

„Die Differenz von zwei, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen ist rein imaginär.“

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 30. Es ist die zweite und die dritte Potenz von:

$$k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-3}$$

und

$$k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-3}$$

zu berechnen.

Auflösung. Es gibt:

$$k_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3} \right)^2 = + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{-3}$$

(nach Antwort auf Frage 46, weil $a = -\frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist)

oder:

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

d. i.:

$$= k_2$$

ferner:

$$k_2^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2 = +\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

oder:

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

d. i.:

$$= k_2$$

und

$$k_1^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = -\frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 + \left(+3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\right) i$$

(nach Antwort auf Frage 47)

oder:

$$= -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} + 0$$

d. i.:

$$= +1$$

endlich:

$$k_2^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3}\right)^3 = -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} + \left(-\frac{3}{8}\sqrt{3} + \frac{3}{8}\sqrt{3}\right) i$$

d. i.:

$$= +1$$

Hieraus ergibt sich folgende Formel:

$$\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

Aufgabe 31. Nachfolgender Ausdruck ist auf seine einfachste Form zu bringen:

$$\left\{2 - \sqrt{-16} + \left[i \cdot \sqrt{25} - (6 \cdot \sqrt{9} - \sqrt{256}) - 2i^2\right] + \sqrt{-49}\right\}^5$$

Auflösung. Wenn man die imaginäre Einheit absondert und die Wurzeln zieht, erhält man für:

$$\left\{2 - \sqrt{-16} + \left[i \cdot \sqrt{25} - (6 \cdot \sqrt{9} - \sqrt{256}) - 2i^2\right] + \sqrt{-49}\right\}^5 =$$
$$\left\{2 - 4i + [5i - (18 - 16) + 2] + 7i\right\}^5$$

und nach Auflösung der Klammern:

$$= \left\{2 - 4i + 5i - 2 + 2 + 7i\right\}^5$$

oder vereinigt:

$$= (2 + 8i)^5$$

Setzt man nun in die Gleichung:

$$(a \pm bi)^n = a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) a^{n-4} \cdot b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots$$
$$+ \left[\pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right.$$
$$\left.\pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot a^{n-5} \cdot b^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots\right] i$$

(siehe Antwort auf Frage 48)

für $a = 2$, $b = 8$ und $n = 5$ ein, so erhält man:

$$(2+8i)^5 = 2^5 - \frac{5\cdot4\cdot2^3\cdot8^2}{1\cdot2} + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2^1\cdot8^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$
$$+\left(5\cdot2^4\cdot8 - \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2^2\cdot8^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2^0\cdot8^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\right)\cdot i$$

oder gekürzt:

$$= 32 - 5120 + 40960 + (640 - 20480 + 32768)\,i$$

oder vereinigt:

$$= +35872 + 12928\,i$$

Aufgabe 32. Es ist:

$$(1-\sqrt{-1})^{-7}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach Erkl. 24 ist:

$$(1-\sqrt{-1})^{-7} = \frac{1}{(1-\sqrt{-1})^7}$$

Setzt man in die, in der Antwort auf Frage 48 abgeleitete Formel:

$$(a-bi)^n = a^n - \frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}b^2}{1\cdot2} \text{ u. s. w.}$$

für $a = 1$, $b = 1$ und $n = 7$ ein, so erhält man:

$$(1-\sqrt{-1})^7 = 1^7 - \frac{7\cdot6\cdot1^5\cdot1^2}{1\cdot2} + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot1^3\cdot1^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot1^1\cdot1^6$$
$$+\left(-7\cdot1^6\cdot1^1 + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot1^4\cdot1^3}{1\cdot2\cdot3} - \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot1^2\cdot1^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\cdot1^0\cdot1^7\right)$$

oder gekürzt:

$$= 1 - 21 + 35 - 7 + (-7 + 35 - 21 + 1)\,i$$

oder vereinigt:

$$= 8 + 8i$$

Es gibt also:

$$(1-\sqrt{-1})^{-7} = \frac{1}{(1-\sqrt{-1})^7} = \frac{1}{8+8i}$$

oder nach Antwort auf Frage 42:

$$= \frac{(8-8i)}{(8+8i)\cdot(8-8i)} = \frac{8-8i}{8^2+8^2}$$

d. i.:

$$= \frac{1-i}{16} \text{ oder } = \frac{1}{16} - \frac{i}{16}$$

Aufgabe 33. Es sind die ersten vier Potenzen von:

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\right)$$

zu berechnen.

Erkl. 80. Man erhält für:

$$\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{a^2}$$
$$= \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{a}$$

Auflösung. Die erste Potenz ist die Grundzahl selbst, also:

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\right)^1 =$$
$$-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}$$

Die zweite Potenz gibt, wenn man in die Formel:

$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

für $a = -\sqrt[3]{a}$ und für $b = \frac{1}{2}\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ einsetzt:

$$\left(-\sqrt[3]{a}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\right)^2 = +\sqrt[3]{a^2}-\frac{1}{4}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{a^2}$$

$$+2\cdot(-\sqrt[3]{a})\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{+3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\cdot i = \sqrt[3]{a^2}-\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[2]{3}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot i$$

(siehe Erkl. 80)

$$=\frac{1}{4}\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{3}\cdot i$$

Die dritte Potenz gibt nach der Formel:

$$(a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)\cdot i$$

(siehe Antwort auf Frage 47)

$$\left(-\sqrt[3]{a}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\right)^3 = -a - 3\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\frac{1}{4}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{a^2}$$

$$+\left[3\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^2}} - \frac{1}{8}\cdot\left(\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\right)^3\right] i$$

oder nach Erkl. 80a:

$$= -a + \frac{9}{4}a + \left(\frac{3}{2}a\sqrt{3} - \frac{3}{8}a\sqrt{3}\right)i$$

oder vereinigt:

$$= +\frac{5}{4}a + \frac{9}{8}a\sqrt{3}\,i = \frac{1}{8}a\cdot(10+9\sqrt{3}\,i)$$

Erkl. 80a. Man erhält für:

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{a^2} =$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a} = \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{a^3} = a\sqrt{3}$$

und für:

$$\left(\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\right)^3 = \sqrt{3^3}\cdot\sqrt[6]{a^6} = 3\cdot\sqrt{3}\cdot a$$

Die vierte Potenz gibt nach der Formel:

$$(a+bi)^4 = a^4 - \frac{4\cdot3\cdot a^2b^2}{1\cdot2} + \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot a^0b^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

$$+\left(+4\cdot a^3b - \frac{4\cdot3\cdot2\cdot a^1b^3}{1\cdot2\cdot3}\right)i$$

$$= a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + (4a^3b - 4ab^3)\,i$$

(siehe Antwort auf Frage 48):

$$\left(-\sqrt[3]{a}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\right)^4 = +\sqrt[3]{a^4} - 6\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot3\cdot\sqrt[3]{a^2} + \frac{1}{16}\cdot9\cdot\sqrt[3]{a^4}$$

$$+\left(-4\cdot\sqrt[3]{a^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^2}} + 4\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\frac{1}{8}\cdot\sqrt{3^3\cdot\sqrt[3]{a^6}}\right)i$$

oder nach Erkl. 80b:

$$= a\sqrt[3]{a} - \frac{9}{2}a\sqrt[3]{a} + \frac{9}{16}a\sqrt[3]{a} + \left(-2a\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{a} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\cdot a\sqrt[3]{a}\right)i$$

oder vereinigt:

$$= -\frac{47}{16}a\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot a\cdot\sqrt[3]{a}\,i$$

oder:

$$= \frac{1}{16}a\sqrt[3]{a}\cdot\left(-47+\frac{1}{8}\sqrt{3}\cdot i\right)$$

Erkl. 80b. Es gibt:

$$\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{a^2}$$

$$= a\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{a}$$

und

$$\sqrt{3^3\cdot\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt{3^3}\cdot\sqrt[6]{a^6} = 3\sqrt{3a}$$

Aufgabe 34. Was erhält man für:

$$(2+3i)^6+(2-3i)^6?$$

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 4[?] gibt:

$$(2+3i)^6+(2-3i)^6$$

wenn man in die daselbst abgeleitete Formel für $a=2$, $b=3$ und $n=6$ einsetzt:

$$=2\cdot\left[2^6-\frac{6\cdot5\cdot2^4\cdot3^2}{1\cdot2}+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2^2\cdot3^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2^0\cdot3^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\right]$$

$$=2\cdot[64-2160+4860-729]=2\cdot2035=4070$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 35. Nachstehende Potenzen sind mit Hilfe der Formel des binomischen Lehrsatzes zu berechnen.

a) $\left(7+6\cdot\sqrt{-\frac{1}{4}}\right)^4$

b) $(1+\sqrt{-1})^7$

c) $\left\{3-\sqrt{-25}+\left[i\cdot\sqrt{9}-(2i^2\cdot\sqrt{36}+\sqrt{144})+9i^2\right]+\sqrt{-81}\right\}^{-3}$

d) $(5-4i)^2+(2-i)^3-(1-5i)^4$

Andeutungen.

a) Auflösung mit Hilfe der in der Auflösung der Aufgabe 33 abgeleiteten Formel: $(a+bi)^4=a^4-6a^2b^2+b^4+(4a^3b-4ab^3)i$ durchzuführen.

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 32.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 31.

d) Auflösung nach Erkl. 78 und Aufgabe 33 durchzuführen.

Aufgabe 36. Was erhält man für:

$$(3+4i)^2-(3-4i)^2?$$

Andeutung. Auflösung nach der Antwort auf Frage 46 durchzuführen.

Aufgabe 37. Es sind die fünf ersten Potenzen von:

$$\left(2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}-3\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)$$

ohne Anwendung der Formel des binomischen Lehrsatzes zu berechnen.

Andeutung. Die Berechnung geschieht durch direktes Ausmultiplizieren.

Aufgabe 38. Die in der Antwort auf Frage 47, b) entwickelte Formel:

$$(a\pm bi)^{-3}=\frac{1}{(a^3-3ab^2)+(\pm3a^2b\mp b^3)i}$$

ist nach der Antwort auf Frage 42 weiter zu behandeln.

Andeutung. Auflösung ähnlich wie in der Antwort auf Frage 46, b).

---

e) Ueber die Quadratwurzel.

Anmerkung 7. Ist der Wurzelexponent grösser als 2, so erfolgt die Radizierung einer komplexen Zahl nach dem sogen. Moivreschen Satze, dessen Ableitung und Anwendung im Teil D dieses Werkes gelehrt werden wird. Ist der Wurzelexponent

gleich 3, so könnte man in ähnlicher Weise wie bei der Quadratwurzel auch ohne Benutzung der Moivreschen Formel die Wurzel ermitteln. Da dieses Verfahren aber umständlicher und schwieriger ist, so soll es hier unberücksichtigt bleiben.

Frage 51. Wie wird aus einer komplexen Zahl die Quadratwurzel gezogen?

Antwort. Man erhält für:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

und für:

$$\sqrt{a-bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

Beweis. Setzt man für:

$$\sqrt{a+bi} = x+yi$$

und für:

$$\sqrt{a-bi} = x-yi$$

unter der Voraussetzung, dass x und y (gleich wie a und b) reelle Zahlen bedeuten, so ist:

$$(\sqrt{a+bi})^2 = (x+yi)^2$$

oder:

$$(a+bi) = x^2+2xyi-y^2 \text{ (nach Erkl. 78)}$$

oder:

$$= (x^2-y^2)+2xyi$$

und

$$(\sqrt{a-bi})^2 = (x-yi)^2$$

oder:

$$(a-bi) = x^2-2xyi-y^2 = (x^2-y^2)-2xyi$$

Hieraus folgt, dass:

$$a = x^2-y^2$$

oder:

$$a^2 = (x^2-y^2)^2 = x^4-2x^2y^2+y^4$$

(nach Erkl. 70)

und

$$b = 2xy$$

oder:

$$b^2 = 4x^2y^2$$

ist. Addiert man a^2 und b^2, so ergibt sich:

$$a^2+b^2 = x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2 = x^4+2x^2y^2+y^4$$

d. i.:

$$= (x^2+y^2)^2$$

Demnach ist:

$$\pm\sqrt{a^2+b^2} = \pm\sqrt{(x^2+y^2)^2} = (x^2+y^2)$$

Nun war nach Voraussetzung:

$$(x^2-y^2) = a$$

folglich ist:

$$a\pm\sqrt{a^2+b^2} = x^2+y^2+(x^2-y^2) = 2x^2$$

oder:

$$x^2 = \frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

d. i.:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

Ferner ist:

$$-a \pm \sqrt{a^2+b^2} = x^2 + y^2 - (x^2 - y^2) = 2y^2$$

oder:

$$y^2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

d. i.:

$$y = \pm\sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass vor $\sqrt{a^2+b^2}$ im vorliegenden Falle **nur** das **Pluszeichen** Gültigkeit haben kann. $\sqrt{a^2+b^2}$ ist [auch bei negativem b, denn $(-b)^2 = +b^2$], stets **grösser** als a. Würde man diese Wurzel nun **negativ** nehmen, so würde:

$$\sqrt{\frac{\pm a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

imaginär werden; es würde sich also für die **reellen** Zahlen x und y **Imaginäres** ergeben, was keinen Sinn hat.

Demnach hat man für:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

und für:

$$y = +\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

zu setzen und erhält also:

$$\sqrt{a+bi} = x + yi = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

und

$$\sqrt{a-bi} = x - yi = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

Erkl. 81. Ist a negativ, so ergibt sich:

$$\sqrt{-a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

und

$$\sqrt{-a-bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 39. Man soll die folgenden Quadratwurzeln ziehen.

a) $\sqrt{3+4i}$

Auflösungen.

a) Setzt man in die Formel:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

für $a = 3$ und $b = 4$ ein, so erhält man:

$$\sqrt{3+4i} = \pm\left[\sqrt{\frac{3+\sqrt{9+16}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-3+\sqrt{9+16}}{2}}\right]$$

oder:

$$= \pm\left[\sqrt{\frac{3+5}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\right] = \pm\left[\sqrt{4} + i\cdot\sqrt{1}\right] = \pm(2+i$$

b) $\sqrt{1-\sqrt{-8}}$

b) Wird in die Formel:

$$\sqrt{a-bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

für $a=1$ und $b=\sqrt{8}$ gesetzt, so ergibt sich:

$$\sqrt{1-i\sqrt{8}}=\pm\left[\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+8}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+8}}{2}}\right]$$

oder:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{1+3}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-1+3}{2}}\right]=\pm(\sqrt{2}-i)$$

c) $\sqrt{\frac{m^2n}{o^2}-np+\frac{imn\sqrt{4p}}{o}}$

c) Man erhält zunächst für:

$$\sqrt{\frac{m^2n}{o^2}-np+\frac{imn\sqrt{4p}}{o}}=\sqrt{\frac{n(m^2-p\cdot o^2)}{o^2}+\frac{2imn\sqrt{p}}{o}}$$

und wenn man in die Formel in der Antwort auf Frage 51 für $a=\frac{n(m^2-po^2)}{o^2}$ und für $b=\frac{2mn\sqrt{p}}{o}$ einsetzt:

$$=\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{n\cdot(m^2-po^2)}{o^2}+\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^2-po^2)^2}{o^4}+\frac{4m^2h^2p}{o^2}}}{2}}\right.$$
$$\left.+i\cdot\sqrt{\frac{-n(m^2-po^2)}{o^2}+\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^2-po^2)^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}}\right\}$$

$$=\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{nm^2-no^2p}{o^2}+\frac{1}{o^2}\cdot\sqrt{(m^2n+no^2p)^2}}{2}}\right.$$
$$\left.+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-nm^2+no^2p}{o^2}+\frac{1}{o^2}\cdot\sqrt{(m^2n+no^2p)^2}}{2}}\right\}$$ (siehe Erkl. 82)

oder:

$$=\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{nm^2-no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-nm^2+no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}\right\}$$

oder vereinigt:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{2m^2n}{2o^2}}+i\cdot\sqrt{\frac{2no^2p}{2o^2}}\right]$$ (siehe Erkl. 82 a)

oder gekürzt und soweit als möglich die Wurzeln gezogen:

$$=\pm\left(\frac{m}{o}\sqrt{n}+i\sqrt{np}\right)$$

Erkl. 82. Es ist:

$$\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^2-po^2)^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}=\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^4+p^2o^4-2m^2po^2)}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}$$ (nach Erkl. 70)

oder:

$$=\sqrt{\frac{m^4n^2+n^2p^2o^4-2m^2n^2po^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2po^2}{o^4}}$$ (nach Erkl. 34)

oder vereinigt:

$$\sqrt{\frac{m^4n^2+n^2p^2o^4+2m^2n^2po^2}{o^4}}$$

d. i.:

$$=\frac{1}{o^2}\cdot\sqrt{(m^2n+no^2p)^2}=\frac{m^2n+no^2p}{o^2}$$

Erkl. 82a. Man erhält für:

$$\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{nm^2-no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-nm^2+no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}\right\}$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{nm^2-no^2p+m^2n+no^2p}{2o^2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-nm^2+no^2p+m^2n+no^2p}{2o^2}}\right]$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{2m^2n}{2o^2}}+i\sqrt{\frac{2no^2p}{2o^2}}\right]=\pm\left[\sqrt{\frac{m^2n}{o^2}}+i\sqrt{np}\right]$$

$$=\pm\left(\frac{m}{o}\sqrt{n}+i\sqrt{np}\right)$$

---

d) $\sqrt{16+\sqrt{-30}}-\sqrt{16-\sqrt{-30}}$

d) Es ist:

$$\sqrt{16+\sqrt{-30}}-\sqrt{16-\sqrt{-30}}$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{256+900}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{256+900}}{2}}\right]$$

$$-\left\{\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{256+900}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{256+900}}{2}}\right]\right\}$$

oder, wenn nur das vor den eckigen Klammern stehende Pluszeichen berücksichtigt wird (weil sonst sich vier verschiedene Lösungen ergeben würden):

$$=+\sqrt{\frac{16+\sqrt{1156}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{1156}}{2}}-\sqrt{\frac{16+\sqrt{1156}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{1156}}{2}}$$

d. i.:

$$=2i\cdot\sqrt{\frac{-16+34}{2}}=2i\sqrt{9}=6i$$

---

e) $\sqrt{6i}$

e) Für $\sqrt{6i}$ kann man $\sqrt{0+6i}$ setzen und erhält alsdann:

$$\sqrt{0+6i}=\pm\left[\sqrt{\frac{0+\sqrt{0+36}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-0+\sqrt{0+36}}{2}}\right]$$

d. i.:

$$=\pm\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)=\pm\sqrt{3}\cdot(1+i)$$ (vergl. Erkl. 53)

---

f) $\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})}$

f) Nach Erkl. 9 ist:

$$\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})}=\sqrt{-5+\sqrt{-144}}\cdot\sqrt{6-\sqrt{-13}}$$

Nun gibt:

$$\sqrt{-5+\sqrt{-144}} \text{ oder } \sqrt{-5+12i}$$

$$= \pm\left[\sqrt{\frac{-5+\sqrt{25+144}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{+5+\sqrt{25+144}}{2}}\right]$$

$$= \pm\left[\sqrt{\frac{-5+13}{2}} + i\sqrt{\frac{5+13}{2}}\right] = \pm(2+3i)$$

und

$$\sqrt{6-\sqrt{-13}} = \pm\left[\sqrt{\frac{6+\sqrt{36+13}}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{-6+\sqrt{36+13}}{2}}\right]$$

$$= \pm\left[\sqrt{\frac{6+7}{2}} - i\sqrt{\frac{-6+7}{2}}\right] = \pm\left(\sqrt{\frac{13}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

Berücksichtigt man nur die vor den eckigen Klammern stehenden **Pluszeichen**, so erhält man für:

$$\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})} = (2+3i)\cdot\left(\sqrt{\frac{13}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

oder:

$$= 2\cdot\sqrt{\frac{13}{2}} + 3i\sqrt{\frac{13}{2}} - 2i\sqrt{\frac{1}{2}} + 3\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(2\sqrt{\frac{13}{2}} + 3\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \left(3\sqrt{\frac{13}{2}} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)i$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}\left[(2\sqrt{13}+3) + (3\cdot\sqrt{13}-2)i\right]$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$= 0{,}707\cdot[(2\cdot 3{,}606+3) + (3\cdot 3{,}606-2)i] = 7{,}220 + 6{,}234i$$

Erkl. 88. Statt wie nebenstehend die Faktoren einzeln zu radizieren, kann man auch aus dem Produkte die Wurzel ziehen. Man erhält alsdann:

$$\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})} = \sqrt{-30+72i+5i\sqrt{13}+12\cdot\sqrt{13}}$$

(nach Antwort auf Frage 33)

$$= \sqrt{(-30+12\sqrt{13}) + (72+5\sqrt{13})\cdot i}$$

$$= \pm\left[\sqrt{\frac{(-30+12\sqrt{13}) + \sqrt{(-30+12\sqrt{13})^2 + (72+5\sqrt{13})^2}}{2}}\right.$$

$$\left. + i\cdot\sqrt{\frac{-(-30+12\sqrt{13}) + \sqrt{(-30+12\sqrt{13})^2 + (72+5\cdot\sqrt{13})^2}}{2}}\right]$$

(nach Antwort auf Frage 51) oder:

$$= \pm\left[\sqrt{\frac{(-30+12\sqrt{13}) + \sqrt{+900+1872-720\sqrt{13}+5184+325+720\cdot\sqrt{13}}}{2}}\right.$$

$$\left. + i\cdot\sqrt{\frac{+30-12\sqrt{13} + \sqrt{+900+1872-720\sqrt{13}+5184+325+720\sqrt{13}}}{2}}\right]$$

oder vereinigt:

$$= \pm\left[\sqrt{\frac{-30+12\sqrt{13}+\sqrt{8281}}{2}} + i\sqrt{\frac{+30-12\sqrt{13}+\sqrt{8281}}{2}}\right]$$

d. i.:

$$= \pm\left[\sqrt{\frac{-30+12\sqrt{13}+91}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{+30-12\sqrt{13}+91}{2}}\right]$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{61+12\sqrt{13}} + i\cdot\sqrt{121-12\sqrt{13}}\right)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$= \pm 0{,}707\cdot(10{,}212+8{,}818i) = 7{,}220+6{,}234i$$

---

g) $\sqrt{\frac{6+8i}{16-24i\cdot\sqrt{5}}}$

g) Nach Erkl. 31 ist:

$$\sqrt{\frac{6+8i}{16-24i\cdot\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{6+8i}}{\sqrt{16-24i\cdot\sqrt{5}}}$$

Der **Zähler** dieses Bruches gibt nach Antwort auf Frage 51:

$$\sqrt{6+8i}=\pm\left[\sqrt{\frac{6+\sqrt{36+64}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-6+\sqrt{36+64}}{2}}\right]$$
$$=\pm\left[\sqrt{8}+i\cdot\sqrt{2}\right]=\pm\left[2\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right]=\pm\sqrt{2}\cdot(2+i)$$

und der **Nenner** desselben:

$$\sqrt{16-24i\sqrt{5}}=\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{256+576\cdot5}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{256+576\cdot5}}{2}}\right]$$
$$=\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{3136}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{3136}}{2}}\right]=\pm(6-2i\sqrt{5})$$

(siehe Erkl. 84)

Mithin erhält man für:

$$\sqrt{\frac{6+8i}{16-24i\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(2+i)}{6-2i\sqrt{5}}$$

wenn man nur die + Zeichen vor den Klammern berücksichtigt; oder (nach Antwort auf Frage 38):

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot(2+i)\cdot(6+2i\sqrt{5})}{(6-2i\sqrt{5})(6+2i\sqrt{5})}=\frac{12\sqrt{2}+6i\sqrt{2}+4i\sqrt{10}-2\sqrt{10}}{36+20}$$

oder vereinigt:

$$=\frac{2(6\sqrt{2}-\sqrt{10})+2i(3\sqrt{2}+2\sqrt{10})}{56}$$

d. i.:

$$=\frac{(6\sqrt{2}-\sqrt{10})}{28}+\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{10})i}{28}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$=\frac{(6\cdot1{,}414-3{,}162)}{28}+\frac{(3\cdot1{,}414+2\cdot3{,}162)\cdot i}{28}=0{,}190+0{,}877i)$$

Erkl. 84. Man erhält für:

$$\sqrt{\frac{-16+\sqrt{3136}}{2}}=\sqrt{\frac{-16+56}{2}}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=2\sqrt{5}$$

Erkl. 85. Statt (wie obenstehend) die Wurzel aus Zähler und Nenner für sich zu ziehen, kann man sie auch aus dem Quotienten ziehen. Man erhält alsdann:

$$\sqrt{\frac{6+8i}{16-24i\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{(6+8i)\cdot(16+24i\cdot\sqrt{5})}{(16-24i\sqrt{5})\cdot(16+24i\sqrt{5})}}$$ (nach Antwort auf Frage 38)

oder:

$$=\sqrt{\frac{96+128i+144i\sqrt{5}-192\sqrt{5}}{256+576\cdot5}}$$

oder vereinigt:

$$=\sqrt{\frac{96\cdot(1-2\sqrt{5})+16i(8+9\sqrt{5})}{3136}}$$
$$=\sqrt{\frac{16}{3136}\cdot[6\cdot(1-2\sqrt{5})+i(8+9\sqrt{5})]}$$
$$=\frac{1}{14}\cdot\sqrt{6(1-2\sqrt{5})+i(8+9\sqrt{5})}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$= 0{,}071 \cdot \sqrt{-20{,}832 + 28{,}124\,i}$$

oder nach Antwort auf Frage 51:

$$= 0{,}071 \cdot \left[\sqrt{\frac{-20{,}832 + \sqrt{20{,}832^2 + 28{,}124^2}}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{20{,}832 + \sqrt{20{,}832^2 + 28{,}124^2}}{2}}\right]$$

$$= 0{,}071 \cdot \left[\sqrt{\frac{-20{,}832 + 35}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{20{,}832 + 35}{2}}\right]$$

d. i.: $= 0{,}071 \cdot (2{,}661 + 5{,}283) = 0{,}189 + 0{,}375\,i$

(Bem. Die geringe Differenz zwischen diesem und dem obenstehenden Resultate ist eine Folge der Abkürzung sämtlicher Dezimalbrüche auf 3 Stellen.)

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 40. Es sind nachstehende Quadratwurzeln zu ermitteln.

a) $\sqrt{4 + 3i}$

b) $\sqrt{-12 - \sqrt{-25}}$

c) $\sqrt{11\,i}$

d) $\sqrt{(-3 + 4i) \cdot (-2 + 4i\sqrt{6})}$

e) $\sqrt{\dfrac{7 \cdot \sqrt{121} - 24 \cdot \sqrt{-\frac{9}{4}}}{24 + \sqrt{-100}}}$

f) $\sqrt{\dfrac{25x^2r}{z^2} - \dfrac{4x^2y}{r} - \dfrac{20x^2 \cdot \sqrt{-y}}{z}}$

g) $\sqrt{2 + \sqrt{-64}} + \sqrt{2 - 8i}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, a).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, b).

c) Man schreibe für $\sqrt{11\,i} = \sqrt{0 + 11\,i}$ und verfahre dann nach der Antwort auf Frage 51.

d) Man ziehe aus jedem Faktor die Wurzel und multipliziere die resultierenden komplexen Zahlen miteinander. (Zum Vergleiche wende man dann das zweite Verfahren an, d. h. man multipliziere erst die beiden Faktoren miteinander und ziehe hierauf aus ihrem Produkt die Wurzel, wie in Erkl. 83 gezeigt wurde.)

e) Man ziehe zunächst die kleinen Quadratwurzeln und hierauf sowohl aus dem Zähler als auch aus dem Nenner die Wurzel und führe endlich die Division aus. (Zum Vergleiche führe man darauf zuerst die Division aus und ziehe alsdann aus dem Quotienten die Wurzel.) (Vergl. Erkl. 85.)

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, c).

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, d). (Es sollen nur die vor den Klammern [Wurzeln] stehenden + Zeichen berücksichtigt werden.)

C. Ueber die graphische und trigonometrische Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen.

Anmerkung 8. Zum Verständnis des Nachfolgenden sind diejenigen Kenntnisse der Planimetrie und Trigonometrie erforderlich, welche durch das Studium der in dieser Encyklopädie erschienenen Lehrbücher der ebenen Elementargeometrie von Kleyer und Sachs, der Goniometrie und der ebenen Trigonometrie von Kleyer erlangt werden können.

1) Ueber die graphische Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen.

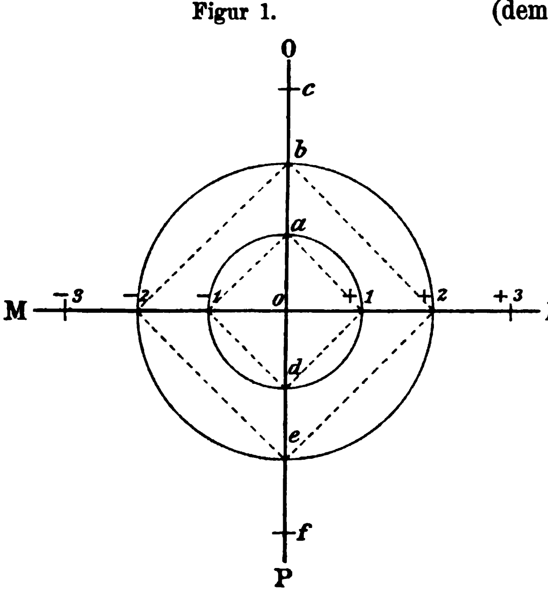
Anmerkung 9. Durch die graphische (oder geometrische) Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen wird das Verständnis für diese Zahlen — besonders aber für die veränderlichen Komplexen — wesentlich erleichtert. Aus diesem Grunde wird dem Studierenden das Nachstehende einer besonderen Beachtung dringend empfohlen.

a) Ueber die graphische Darstellung der imaginären Einheit.

Frage 52. Auf welche Weise lässt sich die imaginäre Einheit graphisch (geometrisch) darstellen?

Erkl. 86. Das Wort „graphisch“ stammt aus dem Griechischen und bedeutet „zeichnerisch“ oder auch „bildlich“.

Figur 1.



Antwort. Die imaginäre Einheit $\pm i$ ist nach der Antwort auf Frage 4, e) die mittlere Proportionale (siehe Erkl. 21) von $+1$ und -1, welche man graphisch (geometrisch) wie folgt darstellen kann. Man trägt von einem beliebigen Punkte (dem Nullpunkt oder Pol) einer unbegrenzten geraden Linie MN (Figur 1) nach rechts und links in beliebig grossen, aber gleichen Abständen Punkte auf und numeriert sie nach rechts mit den positiven, nach links mit den negativen reellen ganzen Zahlen (s. Erkl. 87). Hierauf errichtet man auf dieser Linie im Punkte 0 eine nach beiden Seiten hin unbegrenzte Normale OP und schlägt mit dem Halbmesser $\overline{01}$ einen Kreis. Dieser schneidet OP in a und d. Dann ist $\overline{0a} = \overline{0d}$, und man erhält (nach Erkl. 88) die Proportion:

$$+1 : \overline{0a} = \overline{0a} : -1$$

Hieraus ergibt sich:

$$(\overline{0a})^2 = (+1)\cdot(-1) = -1$$

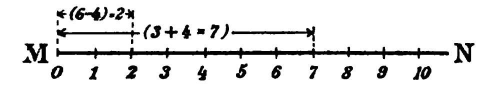
(nach Erkl. 20a)

oder:

$$\overline{0a} = \sqrt{-1}$$

Erkl. 87. Die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, d. h. die absoluten ganzen Zahlen (siehe Erkl. 12), kann man sich durch eine Reihe von Punkten, welche von irgend einem Anfangspunkte (Nullpunkte) aus auf einer einseitig unbegrenzten geraden Linie MN (Figur 2) in beliebig grossen, jedoch gleichen Abständen aufgetragen ist, versinnbildlicht denken.

Figur 2.

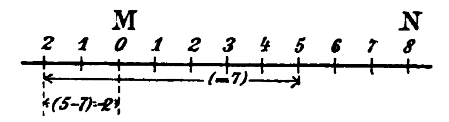


Dann lässt sich eine Addition oder Subtraktion leicht bewerkstelligen. Sollen zwei Zahlen (z. B. 3 und 4) a d d i e r t werden, so hat man nur von dem Punkte, welcher zum ersten Summand (3) gehört, um so viele Striche nach r e c h t s (also vom Nullpunkte fort) zu gehen, als der zweite Summand (4) Einheiten enthält. Die Strecke vom Nullpunkte bis zum Endpunkte ($\overline{07}$) stellt dann die gesuchte Summe dar.

Soll dagegen von einer Zahl (z. B. 6) eine andere (z. B. 4) s u b t r a h i e r t werden, so muss man von dem Punkte des Minuendus (6) um so viele Striche nach l i n k s (also nach dem Nullpunkte hin) gehen, als der Subtrahendus (4) Einheiten besitzt. Die Strecke vom Nullpunkte bis zum Endpunkte ($\overline{02}$) stellt dann die gesuchte Differenz dar (Figur 2).

Ist der Subtrahendus g r ö s s e r als der Minuendus, so gelangt man bei diesem Verfahren nach links über den Nullpunkt hinaus, in die verlängerte MN hinein (z. B. bei $5-7$ um 2 Einheiten; Figur 3).

Figur 3.



Die aus den Differenzen mit grösserem Subtrahendus sich ergebenden n e g a t i v e n Z a h l e n kommen hiernach auf der V e r l ä n g e r u n g von MN zur Darstellung. Die gerade Linie der reellen Zahlen ist daher als nach beiden Seiten hin unbegrenzt anzunehmen und es sind die p o s i t i v e n reellen Zahlen vom Nullpunkte aus nach der einen Richtung (z. B. nach r e c h t s), die n e g a t i v e n dagegen nach der anderen Richtung (nach l i n k s) aufzutragen. Man erhält alsdann als graphische Darstellung der reellen Zahlen die (in Figur 1 abgebildete) Wagerechte MN.

Erkl. 88. Ein Lehrsatz der Planimetrie lautet:

„Im rechtwinkligen Dreiecke ist die aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die

Ferner folgt:

$$+1:\overline{0d} = \overline{0d}:-1$$

oder:

$$(\overline{0d})^2 = (+1)\cdot(-1) = -1$$

oder:

$$0d = \sqrt{-1}$$

Hiernach findet man den Punkt, welcher die imaginäre Einheit darstellt, sowohl auf dem oberen als auch auf dem unteren Stücke der Normalen OP.

Um Irrtümer auszuschliessen, soll nun angenommen werden, dass die p o s i t i v e imaginäre Einheit durch die Strecke $\overline{0a}$, die n e g a t i v e durch die Strecke $\overline{0d}$ dargestellt wird (siehe Erkl. 90 und 90a).

Wird der Kreis mit einem Halbmesser $\overline{02}$ geschlagen, so ist $\overline{0a} = \overline{ab}$ und $\overline{0d} = \overline{de}$, und man erhält die Proportionen:

$$\left.\begin{aligned} +2:\overline{0b} &= \overline{0b}:-2 \\ \text{und}\quad +2:\overline{0e} &= \overline{0e}:-2 \end{aligned}\right\} \text{(nach Erkl. 88)}$$

Aus diesen Proportionen folgt:

$$\overline{0b}^2 = -4$$

oder:

$$\overline{0b} = \sqrt{-4} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 2i$$

und

$$\overline{0e}^2 = -4$$

oder:

$$\overline{0e} = \sqrt{-4} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 2i$$

Es stellt also, weil die Punkte der p o s i t i v e n imaginären Zahlen auf $\overline{0O}$, die der n e g a t i v e n auf $\overline{0P}$ angenommen wurden, die Strecke $\overline{0b} = +2i$ und die Strecke $\overline{0e} = -2i$ dar.

Ist $\overline{bc}$ (Figur 1) $= \overline{ab}$ und $\overline{ef} = \overline{de}$, so erhält man:

$$\overline{0c} = +3i$$

und

$$0f = -3i \text{ u. s. f.}$$

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

1) Die positive imaginäre Zahl bi wird durch eine Strecke dargestellt, welche der Strecke b gleich und mit der imaginären Einheit ($\overline{0a}$) gleich gerichtet ist; die negative imaginäre Zahl $-bi$ wird durch eine der Strecke bi entgegengesetzt gleiche Strecke dargestellt.

Hypotenuse gefällte Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse."

(In Figur 1 sind die rechtwinkligen Dreiecke durch punktierte Linien dargestellt worden.)

Erkl. 89. Das bei der graphischen Darstellung der reellen und imaginären Zahlen (und auch sonst häufig) zur Anwendung gelangende Linienkreuz (Figur 1) wird nach seinem Erfinder Descartes (geb. 1596, gest. 1650) das „Kartesianische Koordinatensystem", die wagerechte Linie desselben die Abscisse (vom Lateinischen abscindere, abschneiden) und die auf ihr normal stehende Linie die Ordinate (vom Lateinischen ordinare, ordnen) genannt.

Erkl. 89a. Die Abscisse MN wird die reelle, die Ordinate OP die imaginäre Achse genannt. Ferner heisst die Strecke $0N$ die Achse der positiven reellen Zahlen, $0M$ die der negativen reellen Zahlen, $0O$ die Achse der positiven imaginären Zahlen und $0P$ die der negativen imaginären Zahlen.

Erkl. 90. Dass die Linie, welche die imaginären Zahlen versinnbildlicht, normal (perpendikulär) zur Linie der reellen Zahlen gerichtet sein muss, ergibt sich auch aus folgender Ueberlegung. Durch eine Drehung von 180° um den Nullpunkt der Linie MN (Figur 1) gelangt man von $+1$ nach -1 und durch eine nochmalige, gleichgrosse Drehung wieder von -1 zurück nach $+1$. Eine gleiche Wirkung kann man sich durch eine Multiplikation mit (-1) oder mit i^2 (weil $i^2 = -1$ ist) hervorgebracht denken, denn wenn man $+1$ mit i^2 multipliziert, so gelangt man ebenfalls zu -1, und wenn man -1 mit i^2 multipliziert, zu $+1$. Wenn nun eine Multiplikation mit i^2 oder eine zweimalige Multiplikation mit i einer Umdrehung von 180° entspricht, so muss eine einmalige Multiplikation mit i einer Umdrehung von 90° gleichkommen, also $(+1)\cdot i = +i$ (d. i. $= \overline{0a}$ oder $= \overline{0d}$) mit $+1$ und -1 (d. i. mit MN) einen Winkel von 90° bilden.

Erkl. 90a. Welche der beiden Richtungen der imaginären Zahlenlinie man als die positive, welche als die negative annehmen will, ist ähnlich wie bei der reellen Zahlenlinie willkürlich.

2) Die reellen und imaginären Einheiten $(+1, -1, +i$ und $-i)$ sind an Grösse gleich, in der Richtung aber von einander verschieden.

3) Das Zahlengebiet hat zwei Hauptrichtungen, die reelle und die imaginäre (vergl. Erkl. 89a).

4) Die imaginäre Einheit ist das Zeichen der Perpendikularität (vergl. Erkl. 90).

5) Die imaginäre Zahlenlinie ist nur durch ihre Beziehung zur reellen Zahlenlinie imaginär. Wird die Wagerechte als die reelle Zahlenlinie betrachtet, so ist die Senkrechte als die imaginäre Zahlenlinie anzusehen. Stellt die Senkrechte jedoch die reellen Zahlen dar, so liegen auf der Wagerechten die imaginären.

b) Ueber die graphische Darstellung der komplexen Zahlen.

Frage 53. Auf welche Weise lässt sich eine komplexe Zahl graphisch (geometrisch) darstellen?

Erkl. 91. Die komplexe Zahl $a + bi$ ist abhängig von zwei von einander völlig unab-

Antwort. Eine jede komplexe Zahl besteht aus zwei Teilen, einem reellen und einem imaginären. Der den reellen Teil der Komplexen darstellende Punkt

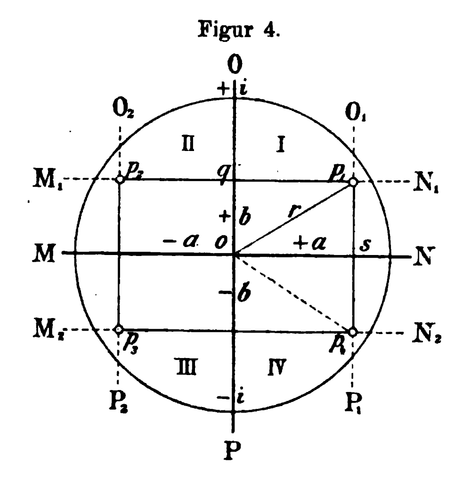
hängigen reellen Zahlen a und b. Daher kann der sie darstellende Punkt nicht in dem Gebiete einer Dimension, d. h. auf einer der beiden Achsen des Linienkreuzes liegen, sondern er muss sich in einem Gebiete von zwei Dimensionen, also in einer Ebene — und zwar in der durch das Linienkreuz bestimmten Zahlenebene — befinden. Es wird also durch die komplexen Zahlen die Zahlenlinie zur Zahlenebene erweitert.

Erkl. 91a. Die Lage eines jeden Punktes der Ebene kann durch eine komplexe Zahl dargestellt werden.

Erkl. 92. Weil sich die Punkte, welche zu den komplexen Zahlen gehören, seitwärts (lateral) vom Linienkreuze befinden, hat Gauss die Komplexen „laterale Zahlen" genannt (vergl. Erkl. 49a).

Erkl. 93. Dass sich jede Zahl — gleichgültig ob dieselbe reell, rein imaginär oder komplex ist, durch das beschriebene Verfahren graphisch darstellen lässt, findet seine Begründung darin, dass sowohl die Zahlenlinie als auch die Zahlenebene unbegrenzt ist und ihre Punkte stetig aufeinander folgen.

Figur 4.



Erkl. 94. Wird um das Linienkreuz ein Kreis geschlagen (Figur 4), dessen Mittelpunkt sich im Durchschnittspunkte der beiden Achsen befindet, so fällt Punkt p_1 in den ersten, p_2 in den zweiten, p_3 in den dritten und p_4 in den vierten Viertelkreis (Quadranten). Bei gehöriger Länge des Kreishalbmessers werden daher die Punkte aller Komplexen von der Form:

$+a+bi$ im ersten
$-a+bi$ im zweiten
$-a-bi$ im dritten
$+a-bi$ im vierten

Quadranten liegen.

befindet sich auf der Abscisse MN, der Punkt des imaginären Teiles auf der Ordinate OP (Figur 4). Demnach kann der zu der komplexen Zahl gehörende Punkt weder auf der Achse der reellen Zahlen, noch auf der der imaginären liegen. Man hat ihn also ausserhalb des Linienkreuzes zu suchen und findet ihn in dem Schnittpunkte p_1 der beiden in den Endpunkten s und q der Strecken $0s = a$ und $0q = bi$ errichteten Normalen (vergl. Erkl. 91 und 91a).

In gleicher Weise findet man für:

$-a+bi$ den Punkt p_2
$-a-bi$ den Punkt p_3
$+a-bi$ den Punkt p_4 (s. Erkl. 94)

Aus Vorstehendem ergeben sich folgende Sätze:

1) Die komplexe Zahl $a+bi$ wird dargestellt durch den, dem Nullpunkte des Linienkreuzes gegenüberliegenden, vierten Eckpunkt eines Rechteckes, dessen Seiten (Grundlinie und Höhe) von der Abscisse a und der Ordinate b gebildet werden.

2) Die Punkte aller komplexen Zahlen, welche dasselbe reelle Glied $+a$ bezw. $-a$ enthalten, liegen auf der die Achse der reellen Zahlen im Endpunkte von $+a$ bezw. $-a$ rechtwinklig durchschneidenden Geraden O_1P_1 bezw. O_2P_2 (Figur 4).

3) Die Punkte aller komplexen Zahlen, welche denselben reellen Faktor $+b$ bezw. $-b$ des imaginären Gliedes besitzen, liegen auf der die Achse der imaginären Zahlen im Endpunkte von $+b$ bezw. $-b$ rechtwinklig durchschneidenden Geraden M_1N_1 bezw. M_2N_2.

4) Die Punkte zweier konjugierten komplexen Zahlen (z. B. p_1 und p_4 für $a+bi$ und $a-bi$) bilden die Endpunkte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes $(0p_1p_4)$, dessen Höhe gleich der das reelle Glied (a) der beiden Komplexen darstellenden Strecke $(\overline{0s})$ ist.

Frage 54. Welche Veränderungen erleidet die Lage des die komplexe Zahl $a + bi$ darstellenden Punktes p_1 (Figur 4), wenn a oder b allein, oder beide gleichzeitig veränderliche Grössen (vergl. Antwort auf Frage 23) sind?

Antwort. Ist nur das reelle Glied a der komplexen Zahl $a + bi$ eine veränderliche Grösse, so wird, wenn a stetig abnimmt, Punkt s allmählich nach 0 und Punkt p_1 allmählich nach q rücken, und wenn a ganz verschwindet, Punkt s auf 0 und Punkt p_1 auf q fallen. Dann stellt die Strecke $\overline{0q}$ die Komplexe $0 + bi$, d. h. die rein imaginäre Zahl bi dar (vergl. Erkl. 95).

Nimmt dagegen a stetig zu, so entfernt sich Punkt p_1 allmählich von q und in Richtung der verlängerten $\overline{p_1 q}$ und befindet sich bei unendlich grossem a unendlich weit von der Achse der imaginären Zahlen.

Ist nur der reelle Faktor b des imaginären Gliedes eine veränderliche Grösse, so bewegt sich bei stetiger Abnahme von b Punkt p_1 allmählich nach s und Punkt q allmählich nach 0, und es fällt, wenn b ganz verschwindet, Punkt p_1 auf s und q auf 0. Dann stellt die Strecke $\overline{0s}$ die Komplexe $a + 0i$, d. h. die reelle Zahl a dar.

Nimmt dagegen b stetig zu, so entfernt sich Punkt p_1 allmählich von s und in Richtung der verlängerten $\overline{sp_1}$ und liegt bei unendlich grossem b unendlich weit von der Achse der reellen Zahlen.

Sind beide reellen Bestandteile (a und b) variabel, so wird sich Punkt p_1 bei stetiger Abnahme von a und b allmählich dem Nullpunkte des Linienkreuzes nähern und auf denselben fallen, wenn $a = b = 0$ wird, während er sich bei stetiger Zunahme von a und b allmählich vom Nullpunkte entfernen und unendlich weit von diesem liegen wird, wenn a und b unendlich gross geworden sind.

Verändern sich a oder b (oder beide) nicht stetig, sondern sprungweise (vergl. Antwort auf Frage 23), so wird sich Punkt p_1 den Achsen (oder dem Nullpunkte) des Linienkreuzes sprungweise nähern, bezw. sich von ihnen entfernen.

Erkl. 95. Die in der Antwort auf Frage 24 mitgeteilten Sätze, welche lauten:

1) Eine komplexe Zahl wird zu einer rein imaginären, wenn ihr reelles Glied verschwindet.
2) Eine komplexe Zahl geht in eine reelle über, wenn ihr imaginäres Glied verschwindet.
3) Eine komplexe Zahl wird zu Null, wenn ihr reelles und ihr imaginäres Glied gleichzeitig gleich Null werden.
4) Eine komplexe Zahl wird unendlich gross, wenn eines ihrer reellen Bestandteile (oder beide gleichzeitig) unendlich gross werden —

werden durch die nebenstehenden Ausführungen von neuem bewiesen.

Frage 55. Wie lässt sich die Entfernung r (Figur 4) des die komplexe Zahl $a + bi$ darstellenden Punktes p_1 vom Nullpunkte des Linienkreuzes berechnen? — Welchen Namen führt diese Strecke? — Wozu kann sie benutzt werden?

Erkl. 96. Der Modulus der komplexen Zahl ist der Radiusvektor des die Komplexe darstellenden Punktes.

Erkl. 96a. Das Wort „Radiusvektor" stammt aus dem Lateinischen und bedeutet so viel als „Richtungslinie".

Antwort. Die Strecke $\overline{0s}$ ist gleich dem reellen Gliede a und die Strecke $\overline{0q}$ (oder $\overline{sp_1}$) gleich dem reellen Faktor des imaginären Gliedes bi der Komplexen $a + bi$, mithin erhält man nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

$$r^2 = a^2 + b^2$$

oder:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

d. h. den Modulus der Komplexen (vergl. Erkl. 65).

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Die Entfernung des eine komplexe Zahl darstellenden Punktes vom Nullpunkte des Linienkreuzes ist gleich dem Modulus der Komplexen." (Siehe auch Erkl. 96).

Da der Modulus nur die Entfernung zweier Punkte angibt, so muss derselbe stets eine absolute (positive) Zahl sein (vergl. Erkl. 12).

Der Modulus ist gleich Null, wenn Punkt p_1 auf 0 fällt, wenn also $a = 0$ und $b = 0$ ist; er ist gleich a, wenn $b = 0$ ist, und gleich b, wenn a verschwindet; er ist unendlich gross, wenn $a = \infty$ oder $b = \infty$ ist, oder wenn beide gleichzeitig unendlich gross sind.

Hieraus ist schon ersichtlich, dass der Modulus als Maass bei der Vergleichung komplexer Zahlen unter sich benutzt werden kann.

Frage 56. Was versteht man unter einer komplexen Einheit?

Antwort. Unter einer komplexen Einheit versteht man eine komplexe Zahl, deren Modulus gleich Eins ist, deren Punkt also auf der Peripherie eines Kreises liegt, welcher um den Nullpunkt des Linienkreuzes mit einem Halbmesser gleich der Längeneinheit beschrieben ist.

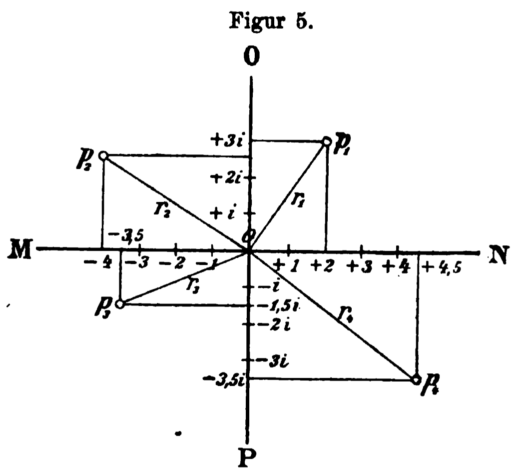
Das reelle Glied der komplexen Einheit liegt zwischen $+1$ und -1, das imaginäre zwischen $+i$ und $-i$.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 41. Es sind die nachfolgenden Zahlen graphisch darzustellen und ihre Moduln zu berechnen:

a) $2+3i$
b) $-4+2,5i$
c) $-3,5-1,5i$
d) $+4,5-3,5i$

Figur 5.



Auflösungen. (Figur 5.)

a) Der die komplexe Zahl $2+3i$ darstellende Punkt ist der Schnittpunkt p_1 der beiden in den Endpunkten der Strecken $\overline{0(+2)}$ und $\overline{0(+3i)}$ errichteten Normalen. Der Modulus von $2+3i$ ist:

$$r_1 = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3,6\cdots$$

b) Der Punkt der Komplexen $-4+2,5i$ ist der Schnittpunkt p_2 der beiden Normalen, welche in den Endpunkten der Strecken $\overline{0(-4)}$ und $\overline{0(+2,5i)}$ errichtet werden. Der Modulus dieser Komplexen ist:

$$r_2 = \sqrt{4^2+2,5^2} = \sqrt{22,25} = 4,7\cdots$$

c) Der die komplexe Zahl $-3,5-1,5i$ darstellende Punkt ist p_3. Derselbe ist vom Nullpunkte des Linienkreuzes entfernt um:

$$r_3 = \sqrt{3,5^2+1,5^2} = \sqrt{14,5} = 3,8\cdots \text{ Einheiten.}$$

d) Der die komplexe Zahl $+4,5-3,5i$ darstellende Punkt ist p_4. Derselbe ist vom Nullpunkte des Linienkreuzes entfernt um:

$$r_4 = \sqrt{4,5^2+3,5^2} = \sqrt{32,5} = 5,7\cdots \text{ Einheiten.}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 42. Nachfolgende komplexe Zahlen sind graphisch darzustellen und ihre Moduln zu berechnen:

a) $+0,5+1,5i$
b) $+1,5-2,5i$
c) $-3+\sqrt{-9}$
d) $+i\sqrt{-12,25}-\sqrt{-12,25}$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 41.

2) Ueber die trigonometrische Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen.

Frage 57. Wie lässt sich die komplexe Zahl $a+bi$ trigonometrisch darstellen?

Antwort. In dem rechtwinkligen Dreiecke opq (Figur 6) ist:

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi$$

und

$$\frac{b}{r} = \sin\varphi \quad \text{(siehe Erkl. 97)}$$

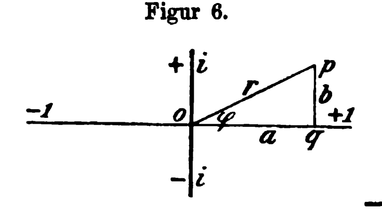
Erkl. 97. In dem rechtwinkligen Dreiecke opq (Figur 6) ist:

der Quotient der Gegenkathete b durch die Hypotenuse r der Sinus des Winkels φ,

der Quotient der Nebenkathete a durch die Hypotenuse r der Kosinus des Winkels φ,

der Quotient der Gegenkathete b durch die Nebenkathete a die Tangente des Winkels φ.

Figur 6.



folglich ist:

$$a = r \cdot \cos\varphi$$
$$b = r \cdot \sin\varphi$$

Demnach erhält man für:

$$a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Hierin bedeutet:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Frage 58. Wie kann man die Grösse des Winkels, welchen der Modulus einer komplexen Zahl mit der Achse der positiven reellen Zahlen einschliesst, berechnen? — Welchen Namen führt dieser Winkel? — Wie wird der allein von ihm abhängige Ausdruck $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ genannt?

Erkl. 98. Ein Winkel lässt sich statt durch Grade auch durch den mit dem Halbmesser $= 1$ zwischen seinen Schenkeln beschriebenen Kreisbogen (lat. arcus) ausdrücken. Da der Umfang eines mit einem Halbmesser gleich der Längeneinheit beschriebenen Kreises gleich 2π ist, so ist der arcus von 360^0 gleich 2π, der von 180^0 gleich π, der von 90^0 gleich $\frac{\pi}{2}$ u. s. w., und man kann z. B. statt $\sin 90^0$ auch schreiben $\sin\frac{\pi}{2}$. Von dieser Schreibweise wird in der höheren Mathematik vielfach Gebrauch gemacht.

Erkl. 98 a. Statt $\tang\varphi = \frac{b}{a}$ kann man auch $\varphi = \text{arcus}\left(\text{tangens} = \frac{b}{a}\right)$ oder kürzer: $= \text{arc tg}\frac{b}{a}$ schreiben. Man versteht hierunter den Bogen, dessen Tangente $= \frac{b}{a}$ ist.

Erkl. 99. Das Wort „Amplitude" stammt vom lateinischen Worte amplitudo, welches „Weite", „Grösse" bedeutet.

Erkl. 100. Werden reelle Zahlen durch Strecken dargestellt, so nennt man letztere gleich, wenn sie nur gleiche Länge haben, ihre Richtung kann eine verschiedene

Antwort. In dem rechtwinkligen Dreiecke opq (Figur 6) ist:

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{b}{a} \text{ (siehe Erkl. 97)}$$

folglich ist:

$$\varphi = \text{arc tang}\frac{b}{a} \text{ (siehe Erkl. 98 u. 98a)}$$

Dieser Winkel wird die Amplitude der komplexen Zahl genannt (s. Erkl. 99).

Der allein von φ (also allein von der Richtung) abhängige zweigliedrige Ausdruck $\cos\varphi + i\sin\varphi$ heisst der „Richtungskoëffizient" der komplexen Zahl.

Aus dem Bisherigen ergibt sich der Satz:

„Eine komplexe Zahl stellt eine gerade Linie ihrer Länge und Richtung nach dar. Diese Gerade hat die Länge r und schliesst mit der Achse der positiven reellen Zahlen den Winkel φ ein." (Vgl. Erkl. 100.)

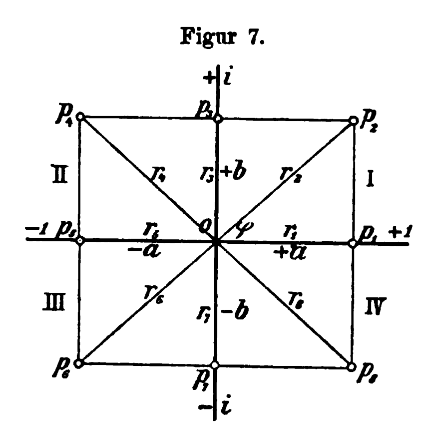
sein. Bei der Darstellung der komplexen Zahlen durch Strecken nennt man letztere gleich und nur dann gleich, wenn sie sowohl gleiche Länge als auch gleiche Richtung besitzen.

Frage 59. Was erhält man für:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

wenn man den Winkel φ, sich stetig ändernd, alle Werte von 0^0 bis 360^0 durchlaufen lässt?

Figur 7.



Erkl. 101. Nach der Trigonometrie (Goniometrie) sind die Grenzen von Sinus, Cosinus und Tangens der Winkel von 0^0 bis 360^0 folgende. Es ist:

$\sin 0^0 = 0$ $\quad$ $\cos 0^0 = 1$
$\sin 90^0 = 1$ $\quad$ $\cos 90^0 = 0$
$\sin 180^0 = 0$ $\quad$ $\cos 180^0 = -1$
$\sin 270^0 = -1$ $\quad$ $\cos 270^0 = 0$
$\sin 360^0 = 0$ $\quad$ $\cos 360^0 = +1$

$\mathrm{tg}\, 0^0 = 0$
$\mathrm{tg}\, 90^0 = +\infty$
$\mathrm{tg}\, 180^0 = 0$
$\mathrm{tg}\, 270^0 = -\infty$
$\mathrm{tg}\, 360^0 = 0$

Bezüglich der Vorzeichen ergibt sich Folgendes:

Der sinus ist im 1. und 2. Quadranten positiv, im 3. und 4. negativ;

der cosinus ist im 1. und 4. Quadranten positiv, im 2. und 3. negativ;

die tangens ist im 1. und 3. Quadranten positiv, im 2. und 4. negativ.

Für die Berechnung der stumpfen, überstumpfen und überspitzen Winkel benutzt man folgende Beziehungen der Funktionen dieser Winkel mit den Funktionen des spitzen Winkels. Es ist:

Antwort. Ist $\varphi = 0^0$, so ist $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$, $b = 0$, $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{0}{a} = 0$. Aus der komplexen Zahl $a + bi$ wird die positive reelle Zahl a. Man erhält demnach:

$$+a = r_1 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

Da $+a$ durch die Strecke $0p_1 = r_1$ (Fig. 7) dargestellt wird, so ist $r_1 = +a$.

Ist φ ein spitzer Winkel $\left(\varphi \gtrless {0^0 \atop 90^0}\right)$, so sind sowohl a und b als auch $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ und $\mathrm{tg}\,\varphi$ positiv und man erhält:

$$+a + bi = r_2 \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Diese komplexe Zahl wird dargestellt durch die Strecke:

$$0p_2 = r_2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(Figur 7)}$$

Ist $\varphi = 90^0$, so ist $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$, $a = 0$, $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{0} = \infty$. Aus der komplexen Zahl $a + bi$ wird die rein imaginäre Zahl $+bi$. Man erhält also:

$$+bi = r_3 \cdot (\cos 90^0 + i\sin 90^0)$$

Diese positive imaginäre Zahl wird dargestellt durch die Strecke:

$$0p_3 = r_3 = b$$

Ist φ ein stumpfer Winkel $\left(\varphi \gtrless {90^0 \atop 180^0}\right)$, so ist $\cos\varphi$ negativ, $\sin\varphi$ positiv (siehe Erkl. 101), a negativ, b positiv, also $\mathrm{tg}\,\varphi$ negativ und man erhält:

$$-a + bi = r_4 \cdot (-\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Diese komplexe Zahl wird dargestellt durch die Strecke:

$$0p_4 = r_4 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(Figur 7)}$$

Ist $\varphi = 180^0$, so ist $\cos\varphi = -1$, $\sin\varphi = 0$, a negativ, $b = 0$, $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{0}{-a} = 0$. Aus der komplexen Zahl wird die negative reelle Zahl a. Man erhält demnach:

$$-a = r_5 \cdot (\cos 180^0 + i\sin 180^0)$$

$\sin(180^0 - \alpha) = +\sin\alpha$
$\sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(360^0 - \alpha) = +\cos\alpha$

$\text{tg}(180^0 - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$
$\text{tg}(180^0 + \alpha) = +\text{tg}\,\alpha$
$\text{tg}(360^0 - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

Erkl. 102. Ist $\text{tg}\,\varphi$ positiv, so sind a und b entweder beide positiv oder beide negativ; im ersteren Falle liegt φ im ersten, im letzteren Falle im dritten Quadranten.

Ist $\text{tg}\,\varphi$ negativ, so ist entweder a negativ und b positiv, oder a positiv und b negativ; im ersteren Falle liegt φ im zweiten, im letzteren Falle im vierten Quadranten.

Diese negative reelle Zahl wird dargestellt durch die Strecke:

$$0p_5 = -a$$

folglich ist $r_5 = a$.

Ist φ ein überstumpfer Winkel $\left(\varphi \begin{matrix} > 180^0 \\ < 270^0 \end{matrix}\right)$, so sind sowohl $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ als auch a und b negativ und $\text{tg}\,\varphi = \frac{-b}{-a} = +\frac{b}{a}$. Man erhält also:

$$-a - bi = r_6 \cdot (-\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

(vgl. Erkl. 101)

oder:

$$-a - bi = -r_6 \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Diese komplexe Zahl wird durch die Strecke:

$$0p_6 = r_6 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

dargestellt (Figur 7).

Ist $\varphi = 270^0$, so ist $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$, $a = 0$, b negativ, $\text{tg}\,\varphi = -\frac{b}{0} = -\infty$. Aus der komplexen Zahl $a + bi$ wird die rein imaginäre Zahl $-bi$ und man erhält:

$$-bi = r_7 \cdot (\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$

Da diese negative imaginäre Zahl durch die Strecke $0p_7 = r_7$ dargestellt wird, so ist $r_7 = b$.

Ist φ ein überspitzer Winkel $\left(\varphi \begin{matrix} > 270^0 \\ < 360^0 \end{matrix}\right)$, so ist $\cos\varphi$ positiv, $\sin\varphi$ negativ, a positiv, b negativ, $\text{tg}\,\varphi = \frac{-b}{+a} = -\frac{b}{a}$. Man erhält demnach:

$$a - bi = r_8 (\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

Diese komplexe Zahl wird durch die Strecke:

$$0p_8 = r_8 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

dargestellt (Figur 7).

Ist $\varphi = 360^0$, so ist $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$, $\text{tg}\,\varphi = 0$, $b = 0$, a positiv. Aus der komplexen Zahl $a + bi$ wird die positive reelle Zahl a. Man erhält demnach:

$$+a = r_1 \cdot (\cos 360^0 + i\sin 360^0)$$

und es ist $r_1 = \overline{0p_1} = +a$.

Frage 60. Wann besitzen komplexe Zahlen dieselbe oder eine um 180^0 verschiedene Amplitude?

Antwort. Komplexe Zahlen, bei welchen das reelle Glied und der reelle

Faktor des imaginären Gliedes dasselbe Verhältnis besitzen, haben dieselbe oder eine um 180° verschiedene Amplitude.

Solche komplexen Zahlen liegen auf derselben, durch den Nullpunkt des Linienkreuzes gehenden geraden Linie (vergl. Erkl. 103).

Erkl. 103. Bei den komplexen Zahlen $+a+bi$ und $-a-bi$ haben a und b dasselbe Verhältnis (denn ist z. B. $a=3$ und $b=4$, so gibt die erstere Komplexe das Verhältnis $\frac{+3}{+4}=+0{,}75$, die letztere das Verhältnis $\frac{-3}{-4}=+0{,}75$), folglich liegen beide Komplexe auf derselben Geraden (nämlich auf $\overline{p_2 0 p_6}$, Figur 7). $(a+bi)$ hat die Amplitude φ, $(-a-bi)$ die Amplitude $(180^0+\varphi)$.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 43. Es sind nachfolgende komplexe Zahlen auf die trigonometrische Form zu bringen:

a) $2+2\sqrt{3}$

b) $+1-\sqrt{-8}$

c) $-2-\sqrt{-5}$

d) $-\sqrt{18}+\sqrt{-7}$

Auflösungen.

a) Der Modulus der Komplexen:

$$2+2\sqrt{-3} \text{ oder } 2+2i\sqrt{3}$$

ist:

$$r=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$$

Den Winkel φ findet man aus:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}=1{,}7321$$

zu 60°. Demnach ist:

$$2+2i\sqrt{3}=4\cdot(\cos 60^0+i\sin 60^0)$$

Diese komplexe Zahl wird also dargestellt durch einen Punkt, welcher auf einer unter 60° zur Achse der positiven reellen Zahlen geneigten Geraden, um vier Längeneinheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes entfernt, liegt.

---

b) Der Modulus der Komplexen:

$$+1-\sqrt{-8} \text{ oder } +1-2i\sqrt{2}$$

ist:

$$r=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+8}=\sqrt{9}=3$$

Den Winkel φ findet man aus:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-2\sqrt{2}}{+1}=-2{,}8284$$

zu 289° 28′ 17″ (siehe Erkl. 104).

Folglich ist:

$$+1-\sqrt{-8}=$$
$$3\cdot(\cos 289^0\,28'\,17''+i\sin 289^0\,28'\,17'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$=1-\sqrt{-8}=$$
$$3\cdot(\cos 70^0\,31'\,43''-i\sin 70^0\,31'\,43'')$$

Erkl. 104. Da $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-2\sqrt{2}}{+1}=-2{,}8284$ ist, so liegt φ (nach Erkl. 102) im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi=2{,}8284$$
$$\operatorname{tg}70^0\,30'=2{,}8239$$
$$\text{Rest: } 45$$

Differenz für 1 Minute = 26,3. Zum Winkel 70° 30′ kommt also noch:

$$\frac{45}{26{,}3}=1\frac{187'}{263} \text{ oder } 1'\,43''$$

Mithin ist:

$$\varphi=360^0-70^0\,31'\,43''=289^0\,28'\,17''$$

---

c) Der Modulus der Komplexen:

$$-2-\sqrt{-5} \text{ oder } -2-i\sqrt{5}$$

ist:

$$r=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{9}=3$$

Erkl. 105. Da $tg\varphi = \frac{-\sqrt{5}}{-2} = +1,1180$ ist, so liegt φ im dritten Quadranten. Man erhält:

$$tg\varphi = 1,1180$$
$$tg\,48^0\,10' = 1,1171$$
$$\text{Rest: } 9$$

Differenz für 1 Minute = 6,6. Zum Winkel $48^0\,10'$ kommt also noch:

$$\frac{9}{6,6} = 1\frac{4'}{11} = 1'\,22''$$

Demnach ist:

$$\varphi = 180^0 + 48^0\,11'\,22'' = 228^0\,11'\,22''$$

Erkl. 106. Da $tg\varphi = \frac{+\sqrt{7}}{-\sqrt{18}} = -0,78968$ ist, so liegt φ im zweiten Quadranten. Man erhält:

$$tg\varphi = 0,78968$$
$$tg\,38^0\,10' = 0,78598$$
$$\text{Rest: } 370$$

Differenz für 1 Minute = 47,1. Zum Winkel von $38^0\,10'$ kommen also noch:

$$\frac{370}{47,1} = 7\frac{403'}{471} = 7'\,51''$$

Demnach ist:

$$\varphi = 180^0 - 38^0\,17'\,51'' = 141^0\,42'\,9''$$

Den Winkel φ findet man aus:

$$tg\varphi = \frac{-\sqrt{5}}{-2} = +1,1180$$

zu $228^0\,11'\,22''$ (siehe Erkl. 105).

Folglich ist:

$$-2-\sqrt{-5} = 3\cdot(\cos 228^0\,11'\,22'' + i\sin 228^0\,11'\,22'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-2-\sqrt{-5} = -3\cdot(\cos 48^0\,11'\,22'' + i\sin 48^0\,11'\,22'')$$

---

d) Der Modulus der Komplexen:

$$-\sqrt{18}+\sqrt{-7} \text{ oder } -3\sqrt{2}+i\sqrt{7}$$

ist:

$$r = \sqrt{(3\cdot\sqrt{2})^2+(\sqrt{7})^2} = \sqrt{25} = 5$$

Den Winkel φ findet man aus:

$$tg\varphi = \frac{+\sqrt{7}}{-\sqrt{18}} = -\sqrt{\frac{2,64575}{4,24264}}$$
$$= -\sqrt{0,623609} = -0,78968$$

zu $141^0\,42'\,9''$ (siehe Erkl. 106).

Folglich ist:

$$-\sqrt{18}+\sqrt{-7} = 5\cdot(\cos 141^0\,42'\,9'' + i\sin 141^0\,42'\,9'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-\sqrt{18}+\sqrt{-7} = 5\cdot(-\cos 38^0\,17'\,51'' + i\sin 38^0\,17'\,51'')$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 44. Die nachfolgenden komplexen Zahlen sind trigonometrisch darzustellen:

a) $4+3i$

b) $-35+23i$

c) $13-\sqrt{-155}$

d) $-\sqrt{21}-10i$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 43, a).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 43, d).

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 43, b).

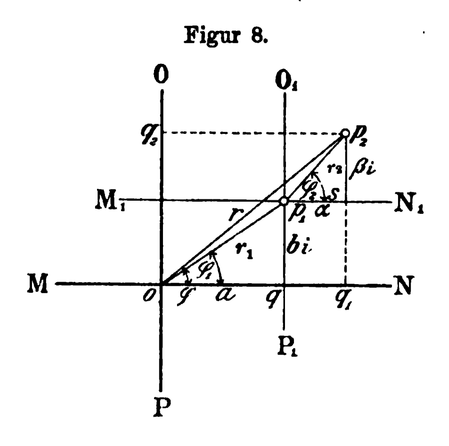
d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 43, c).

D. Ueber das graphische und trigonometrische Rechnen mit imaginären und komplexen Zahlen.

1) Ueber das graphische und trigonometrische Addieren und Subtrahieren.

Frage 61. Wie findet man den die Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen darstellenden Punkt der Zahlenebene?

Figur 8.



Erkl. 107. Da:

$$(a + bi) + (\alpha + \beta i) = (a + \alpha) + (b + \beta)i$$

ist, so kann man auch auf folgende Weise und schneller den diese Summe darstellenden Punkt ermitteln. Man trage auf der Achse der reellen Zahlen MN (in Figur 8) vom Nullpunkte aus $(a + \alpha)$ Einheiten und auf der Achse der imaginären Zahlen OP ebenso $(b + \beta)$ Einheiten ab und errichte in den Endpunkten q_1 und q_2 dieser Strecken Normale. Ihr Schnittpunkt p_2 ist der gesuchte Punkt.

Erkl. 108. Das in vorstehender Erklärung, bezw. in nebenstehender Antwort angegebene Verfahren ist selbstverständlich auch anwendbar, wenn alle oder einzelne Glieder der zu addierenden Komplexen negativ oder einzelne Summanden reelle oder imaginäre Zahlen sind (siehe die Aufgaben 45 bis 47).

Antwort. Man bestimme zunächst den Punkt p_1, welcher den ersten Summanden (z. B. $a + bi$) darstellt (Figur 8), wähle hierauf diesen Punkt als Nullpunkt eines neuen, zum ersten parallelen, Koordinatensystems (siehe Erkl. 89) und ermittele in der durch dieses Linienkreuz bestimmten Zahlenebene den Punkt p_2 des zweiten Summanden (z. B. $\alpha + \beta i$). Dann stellt dieser Punkt auch die Summe $(a + bi) + (\alpha + \beta i)$, bezogen auf $MNOP$, dar, denn es ist:

$$oq = a; \qquad qq_1 = p_1 s = \alpha$$
$$qp_1 = q_1 s = bi; \qquad sp_2 = \beta i$$

also:

$$oq_1 = a + \alpha$$

und

$$q_1 p_2 = bi + \beta i = (b + \beta)i$$

Folglich stellt Punkt p_2 die komplexe Zahl $(a + \alpha) + (b + \beta)i$ dar (bezogen auf das Koordinatensystem $MNOP$); dies ist aber nach der Antwort auf Frage 26 gleich der Summe von $a + bi$ und $\alpha + \beta i$ (siehe Erkl. 107).

Sind mehr als zwei Summanden gegeben, so ist Punkt p_2 als Nullpunkt eines dritten, zu den beiden anderen parallelen, Koordinatensystems anzunehmen, in Bezug auf dieses der Punkt p_3 des dritten Summanden zu bestimmen — und so fort.

Frage 62. Wie lässt sich die Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen trigonometrisch darstellen?

Antwort. Mit Bezug auf Figur 8 ist:

$$a + bi = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$
$$\alpha + \beta i = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$
$$(a + \alpha) + (b + \beta)i = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

(nach der Antwort auf Frage 57)

folglich ist:

$$(a+bi)+(\alpha+\beta i) = r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)+r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$= r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Frage 63. In welcher Beziehung steht der Modulus (Radiusvektor) der Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen zur Summe der Moduln der einzelnen Summanden?

Antwort. Der Modulus (Radiusvektor) der Komplexen $a+bi$ ist:

$$r_1 = \sqrt{a^2+b^2}$$

der von $\alpha+\beta i$:

$$r_2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

der von $(a+bi)+(\alpha+\beta i)$:

$$r = \sqrt{(a+\alpha)^2+(b+\beta)^2}$$

Liegen die Punkte o, p_1 und p_2 in einer geraden Linie, so ist:

$$r = r_1+r_2$$

liegen sie (wie in Figur 8) nicht in einer geraden Linie, dann ist:

$$r < r_1+r_2 \quad \text{(siehe Erkl. 109)}$$

Demnach erhält man:

$$r \leqq r_1+r_2$$

oder:

$$\sqrt{(a+\alpha)^2+(b+\beta)^2} \leqq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Hieraus folgt der Satz:

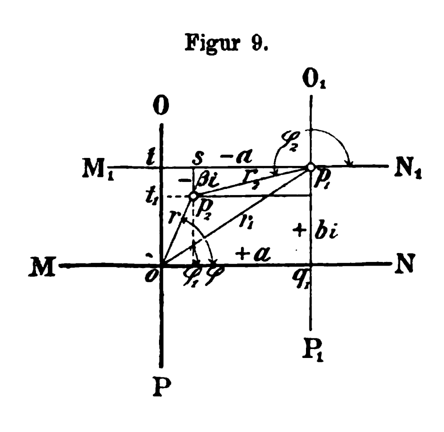
„Der Modulus (Radiusvektor) der Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen ist kleiner oder höchstens gleich der Summe der Moduln der einzelnen Summanden."

Erkl. 109. Ein planimetrischer Lehrsatz lautet:

„In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte Seite."

Frage 64. Wie findet man den die Differenz zweier komplexen Zahlen darstellenden Punkt der Zahlenebene?

Figur 9.



Antwort. Man bestimme zunächst den Punkt p_1, welcher den Minuendus (z. B. $a+bi$) darstellt (Figur 9), wähle hierauf diesen Punkt als Nullpunkt eines neuen, zum ersten parallelen Koordinatensystems $M_1N_1O_1P_1$ und ermittele in der durch dieses Linienkreuz bestimmten Zahlenebene den Punkt p_2, welcher das Entgegengesetzte des Subtrahendus — (wenn also letzterer z. B. $\alpha+\beta i$ ist, die komplexe Zahl $-\alpha-\beta i$) — darstellt, so stellt dieser Punkt auch die Differenz:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i)$$

dar, bezogen auf $MNOP$, denn es ist:

$$oq_1 = a; \qquad p_1s = -\alpha$$

Erkl. 110. Da:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i)=(a-\alpha)+(b-\beta)i$$

ist, so kann man auch auf folgende Weise und schneller den diese Differenz darstellenden Punkt ermitteln. Man trage auf der Achse der reellen Zahlen MN (in Figur 9) vom Nullpunkte aus $(a-\alpha)$ Einheiten und auf der Achse der imaginären Zahlen OP ebenso $(b-\beta)$ Einheiten ab und errichte in den Endpunkten q und t_1 dieser Strecken Normale zu den beiden Achsen. Ihr Schnittpunkt p_2 ist der gesuchte Punkt.

Erkl. 111. Das in vorstehender Erklärung, bezw. in nebenstehender Antwort angegebene Verfahren ist selbstverständlich auch anwendbar, wenn der Minuendus oder der Subtrahendus eine reelle oder eine imaginäre Zahl ist (siehe Aufgabe 50).

also:

$$ts = a-\alpha$$

ferner:

$$q_1p_1=+bi; \qquad sp_2=-\beta i$$

also:

$$p_2q=+bi-\beta i=(b-\beta)i$$

Folglich ist p_2 der Punkt der Komplexen:

$$(a-\alpha)+(b-\beta)i$$

(bezogen auf das Koordinatensystem $MNOP$); dies ist aber nach der Antwort auf Frage 29 die Differenz:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i) \quad \text{(siehe Erkl. 110)}$$

Frage 65. Wie lässt sich die Differenz zweier komplexen Zahlen trigonometrisch darstellen?

Antwort. Mit Bezug auf Frage 9 ist:

$$a+bi=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$
$$\alpha+\beta i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$(a-\alpha)+(b-\beta)i=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

(nach der Antwort auf Frage 57)

folglich ist:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i)=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)-r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Frage 66. Wann ist der Modulus (Radiusvektor) der Differenz zweier komplexen Zahlen gleich der Summe und wann gleich der Differenz der Moduln des Minuendus und Subtrahendus?

Antwort. Es ist:

$$r=r_1+r_2$$

wenn beide Glieder des Subtrahendus negativ sind und sich $a:b$ verhält wie $\alpha:\beta$ (also $\varphi_1=\varphi_2$ ist).

Es ist:

$$r=r_1-r_2$$

wenn $\varphi_2=180^0+\varphi_1$ ist, wenn also beide Glieder des Subtrahendus positiv sind und sich $a:b$ verhält wie $\alpha:\beta$.

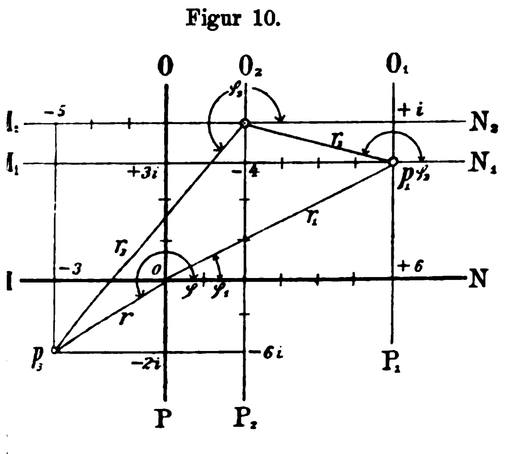
α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 45. Nachfolgende Summe ist graphisch und trigonometrisch darzustellen:

$$(6+3i)+(-4+i)+(-5-6i)$$

Auflösung. (Figur 10.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $\overline{0(+6)}$ und $\overline{0(+3i)}$ auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_1 stellt den Punkt des ersten Summanden $6+3i$ dar. Durch p_1 lege man

Figur 10.



Erkl. 112. Besteht die darzustellende Summe aus mehreren Summanden, so empfiehlt es sich, die Summe zu berechnen und dann den Punkt der aus ihr resultierenden Komplexen zu ermitteln. Im vorliegenden Falle gibt:

$$(6+3i)+(-4+i)+(-5-6i) = (6-4-5)+(3+1-6)i$$

(nach der Antwort auf Frage 26)

oder:

$$= -3-2i$$

Man errichte im Endpunkte der Strecke $\overline{0(-3)}$ auf MN (in Figur 10) und im Endpunkte der Strecke $\overline{0(-2i)}$ auf OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_3 stellt dann die komplexe Zahl $-3-2i$, folglich auch die gegebene Summe dar.

Erkl. 113. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{+3}{+6} = +0{,}5$ ist, so liegt φ_1 im ersten Quadranten (s. Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = +0{,}50000$$
$$\operatorname{tg} 26^0\,30' = +0{,}49858$$
$$\text{Rest: } 142$$

Differenz für 1 Minute $= 36{,}4$; folglich sind zu $26^0\,30'$ noch:

$$\frac{142}{36{,}4} = 3\,\frac{32'}{91} = 3'\,54''$$

hinzuzuzählen. Mithin ist:

$$\varphi_1 = 26^0\,33'\,54''$$

Erkl. 114. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{+1}{-4} = -0{,}25$ ist, so liegt φ_2 im zweiten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = 0{,}25000$$
$$\operatorname{tg} 14^0\,0' = 0{,}24933$$
$$\text{Rest: } 67$$

Differenz für 1 Minute $= 30{,}9$. Zum Winkel $14^0\,0'$ kommen also noch:

$$\frac{67}{30{,}9} = 2\,\frac{52'}{309} = 2'\,10''$$

parallel zu $MNOP$ ein neues Linienkreuz $M_1N_1O_1P_1$ so, dass p_1 den Nullpunkt desselben bildet. Hierauf errichte man im Endpunkte der Strecke $\overline{p_1(-4)}$ auf M_1N_1 und im Endpunkte der Strecke $\overline{p_1(+i)}$ auf O_1P_1 Normale; ihr Schnittpunkt stellt den zweiten Summanden $-4+i$, bezogen auf das Koordinatensystem $M_1N_1O_1P_1$, oder die Summe $(6+3i)+(-4+i)$, bezogen auf $MNOP$, dar. Diesen Punkt wähle man endlich als Nullpunkt eines dritten, zu den beiden ersten parallelen Linienkreuzes $M_2N_2O_2P_2$ und errichte sowohl im Endpunkte der Strecke $\overline{p_2(-5)}$ auf M_2N_2 als auch im Endpunkte der Strecke $\overline{p_2(-6i)}$ auf O_2P_2 eine Normale. Der Schnittpunkt p_3 dieser beiden Normalen stellt den dritten Summanden $-5-6i$, bezogen auf das Koordinatensystem $M_2N_2O_2P_2$, oder die Summe $(-4+i)+(-5-6i)$, bezogen auf $M_1N_1O_1P_1$, oder die Summe $(6+3i)+(-4+i)+(-5-6i)$, bezogen auf $MNOP$, dar (vergl. Erkl. 112).

Trigonometrisch erhält man für:

$$6+3i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45} = 6{,}7082$$

und

$$\varphi_1 = 26^0\,33'\,54''$$

ist (siehe Erkl. 113):

$$6+3i = 6{,}7082\cdot(\cos 26^0 33' 54'' + i\sin 26^0 33' 54'')$$

Ferner ist:

$$-4+i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2 = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17} = 4{,}1231$$

und

$$\varphi_2 = 165^0\,57'\,50''$$

ist (siehe Erkl. 114):

$$-4+i = 4{,}1231\cdot(\cos 165^0\,57'\,50'' + i\sin 165^0\,57'\,50'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-4+i = 4{,}1231\cdot(-\cos 14^0\,2'\,10'' + i\sin 14^0\,2'\,10'')$$

Sodann ist:

$$-5-6i = r_3\cdot(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$$

oder, da:

$$r_3 = \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61} = 7{,}8102$$

und

$$\varphi_3 = 230^0\,11'\,41''$$

ist (siehe Erkl. 115):

$$-5-6i = 7{,}8102\cdot(\cos 230^0\,11'\,41'' + i\sin 230^0\,11'\,41'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-5-6i = 7{,}8102\cdot(-\cos 50^0\,11'\,41'' - i\sin 50^0\,11'\,41'')$$
$$= -7{,}8102\cdot(\cos 50^0\,11'\,41'' + i\sin 50^0\,11'\,41'')$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 180^0 - 14^0\,2'\,10'' = 165^0\,57'\,50''$$

Erkl. 115. Da $\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{-6}{-5} = +1{,}2$ ist, so liegt φ_3 im dritten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = 1{,}2000$$
$$\operatorname{tg} 50^0\,10' = 1{,}1988$$
$$\text{Rest: } 12$$

Differenz für 1 Minute = 7,1. Zum Winkel $50^0\,10'$ kommt also noch:

$$\frac{12}{7{,}1} = 1\frac{49'}{71} = 1'\,41''$$

Mithin ist:

$$\varphi_3 = 180^0 + 50^0\,11'\,41'' = 230^0\,11'\,41''$$

Erkl. 116. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2}{-3} = +0{,}66667$ ist, so liegt φ im dritten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}66667$$
$$\operatorname{tg} 33^0\,40' = 0{,}66608$$
$$\text{Rest: } 59$$

Differenz für 1 Minute = 42. Zum Winkel $33^0\,40'$ kommt also noch:

$$\frac{59}{42} = 1\frac{17'}{42} = 1'\,24''$$

Mithin ist:

$$\varphi = 180^0 + 33^0\,41'\,24'' = 213^0\,41'\,24''$$

Endlich ist:

$$(6+3i)+(-4+i)+(-5-6i)$$

oder:

$$-3-2i = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder, da:

$$r = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} = 3{,}6056$$

und

$$\varphi = 213^0\,41'\,24''$$

ist (siehe Erkl. 116):

$$-3-2i = 3{,}6056\cdot(\cos 213^0\,41'\,24'' + i\sin 213^0\,41'\,24'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-3-2i = -3{,}6056\cdot(\cos 33^0\,41'\,24'' + i\sin 33^0\,41'\,24'')$$

Mithin ist:

$$(6+3i)+(-4+i)+(-5-6i)$$

oder:

$$-3-2i = 6{,}7082\cdot(\cos 26^0\,33'\,54'' + i\sin 26^0\,33'\,54'') + 4{,}1231\cdot(-\cos 14^0\,2'\,10'' + i\sin 14^0\,2'\,10'') - 7{,}8102\cdot(\cos 50^0\,11'\,41'' + i\sin 50^0\,11'\,41'')$$

oder:

$$= -3{,}6056\cdot(\cos 33^0\,41'\,24'' + i\sin 33^0\,41'\,24'')$$

Aufgabe 46. Nachstehende Differenz ist graphisch und trigonometrisch darzustellen:

$$(5-3i)-(-4+2i)$$

Figur 11.

Auflösung. (Figur 11.) Man errichte in den Endpunkten $oq = 5$ und $ot = -3i$ auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den Minuendus $5-3i$ dar. Diesen Punkt wähle man als Nullpunkt eines zweiten, zum ersten parallelen Koordinatensystems $M_1N_1O_1P_1$ und errichte in den Endpunkten $p_1q_1 = +4$ und $p_1t_1 = -2i$ auf M_1N_1 bezw. O_1P_1 Normale. Ihr Schnittpunkt stellt das Entgegengesetzte des Subtrahendus, nämlich:

$$+4-2i \text{ [oder: } -(-4+2i)]$$

dar, bezogen auf das Koordinatensystem $M_1N_1O_1P_1$, oder die Differenz:

$$(5-3i)-(-4+2i)$$

bezogen auf $MNOP$ (vergl. Erkl. 117).

Trigonometrisch erhält man für:

$$5-3i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34} = 5{,}831$$

und

$$\varphi_1 = 329^0\,2'\,10''$$

ist (siehe Erkl. 118):

Erkl. 117. Schneller gelangt man zum Ziel, wenn man die gegebene Differenz berechnet und von der resultierenden komplexen Zahl den Punkt bestimmt. Man erhält für den vorliegenden Fall:

$$(5-3i)-(-4+2i) =$$
$$5-3i+4+2i = +9-5i$$

Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_2 = +9$ und $ot_2 = -5i$ auf MN bezw. OP (Figur 11) Normale. Ihr Schnittpunkt p_2 ist der gesuchte Punkt.

Erkl. 118. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-3}{+5} = -0{,}6$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}60000$$
$$\operatorname{tg} 30^0\,50' = 0{,}59691$$
$$\text{Rest: } 809$$

Differenz für 1 Minute = 39,4. Zum Winkel $30^0\,50''$ kommen also noch:

$$\frac{309}{39{,}4} = 7\frac{166'}{197} = 7'\,50''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 360^0 - 30^0\,57'\,50'' = 329^0\,2'\,10''$$

Erkl. 119. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{-2}{+4} = -0{,}5$ ist, so liegt φ_2 im vierten Quadranten. Man erhält für φ_2 (nach Erkl. 118):

$$= 360^0 - 26^0\,33'\,54'' = 333^0\,26'\,6''$$

Erkl. 120. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-5}{+9} = -0{,}55556$ ist, so liegt φ im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}55556$$
$$\operatorname{tg} 29^0\,0' = 0{,}55431$$
$$\text{Rest: } 125$$

Differenz für 1 Minute = 38,1. Zum Winkel 29^0 kommen also noch:

$$\frac{125}{38{,}1} = 3\frac{107'}{381} = 3'\,17''$$

Mithin ist:

$$\varphi = 360^0 - 29^0\,3'\,17'' = 330^0\,56'\,43''$$

$$5-3i = 5{,}831\cdot(\cos 329^0\,2'\,10'' + i\sin 329^0\,2'\,10'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$5-3i = 5{,}831\cdot(\cos 30^0\,57'\,50'' - i\sin 30^0\,57'\,50'')$$

Ferner ist:

$$-(-4+2i)$$

oder:

$$+4-2i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2 = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 4{,}4721$$

und

$$\varphi_2 = 333^0\,26'\,6''$$

ist (siehe Erkl. 119):

$$+4-2i = 4{,}4721\cdot(\cos 333^0\,26'\,6'' + i\sin 333^0\,26'\,6'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$+4-2i = 4{,}4721\cdot(\cos 26^0\,33'\,54'' - i\sin 26^0\,33'\,54'')$$

Endlich ist:

$$(5-3i)-(-4+2i)$$

oder:

$$9-5i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder, da:

$$r = \sqrt{9^2+5^2} = \sqrt{106} = 10{,}295$$

und

$$\varphi = 330^0\,56'\,43''$$

ist (siehe Erkl. 120):

$$9-5i = 10{,}295\cdot(\cos 330^0\,56'\,43'' + i\sin 330^0\,56'\,43'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$9-5i = 10{,}295\cdot(\cos 29^0\,3'\,17'' - i\sin 29^0\,3'\,17'')$$

Mithin ist:

$$(5-3i)-(-4+2i)$$

oder:

$$9-5i = 5{,}831\cdot(\cos 30^0\,57'\,50'' - i\sin 30^0\,57'\,50'') + 4{,}4721\cdot(\cos 26^0\,33'\,54'' - i\sin 26^0\,33'\,54'')$$

oder:

$$= 10{,}295\cdot(\cos 29^0\,3'\,17'' - i\sin 29^0\,3'\,17'')$$

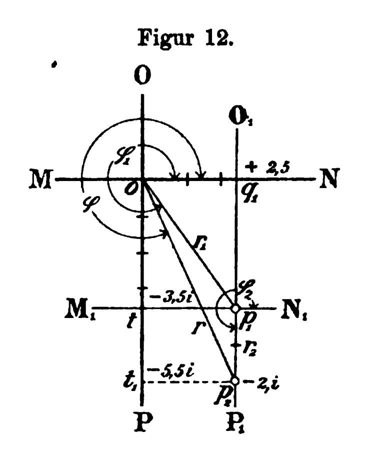
Aufgabe 47. Es ist die Summe:

$$(2{,}5-3{,}5i)+(-2i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Auflösung. Man errichte in den Endpunkten $oq = +2{,}5$ und $ot = -3{,}5i$ auf MN bezw. OP (Figur 12) Normale, wähle ihren, den ersten Summanden der gegebenen Summe darstellenden Schnittpunkt als Nullpunkt eines neuen, zu $MNOP$ parallelen Koordinatensystems $M_1N_1O_1P_1$ und trage auf O_1P_1 die Strecke $p_1p_2 = -2i$ ab, so stellt Punkt p_2 die Summe:

Figur 12.



Erkl. 121. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-3,5}{+2,5} = -1,4$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 1,4000$$
$$\operatorname{tg} 54^0\,20' = 1,3934$$
Rest: 66

Differenz für 1 Minute = 8,6. Zum Winkel $54^0\,20'$ kommen also noch:

$$\frac{66}{8,6} = 7\frac{29'}{43} = 7'\,40''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 360^0 - 54^0\,27'\,40'' = 305^0\,32'\,20''$$

Erkl. 122. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-5,5}{+2,5} = -2,2$ ist, so liegt φ im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi = 2,2000$$
$$\operatorname{tg} 65^0\,30' = 2,1943$$
Rest: 57

Differenz für 1 Minute = 17. Zum Winkel $65^0\,30'$ kommen also noch:

$$\frac{57}{17} = 3\frac{6'}{17} = 3'\,21''$$

Mithin ist:

$$\varphi = 360^0 - 65^0\,33'\,21'' = 294^0\,26'\,49''$$

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

bezogen auf das Linienkreuz *MNOP*, dar.

Trigonometrisch erhält man für:

$$2,5 - 3,5i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{2,5^2 + 3,5^2} = \sqrt{18,30} = 4,3$$

und

$$\varphi_1 = 305^0\,32'\,20''$$

ist (nach Erkl. 121):

$$2,5 - 3,5i = 4,3\cdot(\cos 305^0\,32'\,20'' + i\sin 305^0\,32'\,20'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$2,5 - 3,5i = 4,3\cdot(\cos 54^0\,27'\,40'' - i\sin 54^0\,27'\,40'')$$

Ferner ist:

$$-2i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2 = 2$$

und

$$\varphi_2 = 270^0$$

ist (nach der Antwort auf Frage 59):

$$-2i = 2\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-2i = -2\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

Endlich ist:

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

oder:

$$2,5 - 5,5i = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder, da:

$$r = \sqrt{2,5^2 + 5,5^2} = \sqrt{36,50} = 6,0415$$

und

$$\varphi = 294^0\,26'\,49''$$

ist (nach Erkl. 122):

$$2,5 - 5,5i = 6,0415\cdot(\cos 294^0\,26'\,49'' + i\sin 294^0\,26'\,49'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$2,5 - 5,5i = 6,0415\cdot(\cos 65^0\,33'\,21'' - i\sin 65^0\,33'\,21'')$$

Demnach erhält man für:

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

oder:

$$2,5 - 5,5i = 4,3\cdot(\cos 54^0\,27'\,40'' - i\sin 54^0\,27'\,40'') - 2\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

oder:

$$= 6,0415\cdot(\cos 65^0\,33'\,21'' - i\sin 65^0\,33'\,21'')$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 48. Es ist die Summe:

$$(+2 - 3i) + (-3 + 2i) + (+5 + 3i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 45.

Aufgabe 49. Es ist die Differenz:

$$(-4+5i)-(+1-2i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

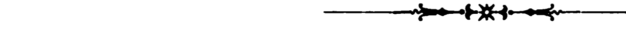
Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 46.

Aufgabe 50. Es ist die Differenz:

$$-5{,}5-(-2{,}5+1{,}5i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Man berechne zunächst die gegebene Differenz und suche dann von der aus dieser Rechnung resultierenden komplexen Zahl den Punkt auf.



2) Ueber das graphische und trigonometrische Multiplizieren.

Frage 67. Wie lässt sich das Produkt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$$

trigonometrisch darstellen?

Antwort. Nach der Antwort auf Frage 33 gibt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)=(a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i$$

also wiederum eine komplexe Zahl.

Es sei nun $a+bi$ dargestellt durch:

$$r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

$\alpha+\beta i$ durch:

$$r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

und $(a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i$ durch:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Dann ist:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

Multipliziert man die beiden, auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Klammerausdrücke miteinander, so erhält man:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2$$
$$+i\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)$$

(nach Erkl. 36)

oder, weil $i^2=-1$ ist:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2$$
$$+i\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)$$

Nun ist nach Erkl. 123:

$$\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

und

$$\sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_1+\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2=\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

Demnach gibt:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

Erkl. 123. Nach einem Satze der Goniometrie ist:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Erkl. 124. Sind mehr als zwei Faktoren vorhanden, so erhält man:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdots[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots)$$
$$+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots)]$$

Erkl. 124 a. Aus nebenstehender Antwort ergibt sich folgender Satz:

„Das Produkt beliebig vieler komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl, der Modulus ist gleich dem Produkte der Moduln und die Amplitude gleich der Summe der Amplituden aller Faktoren."

Hieraus folgt der Satz:

„Komplexe Zahlen werden miteinander multipliziert, indem man ihre Moduln multipliziert und die Amplituden addiert."

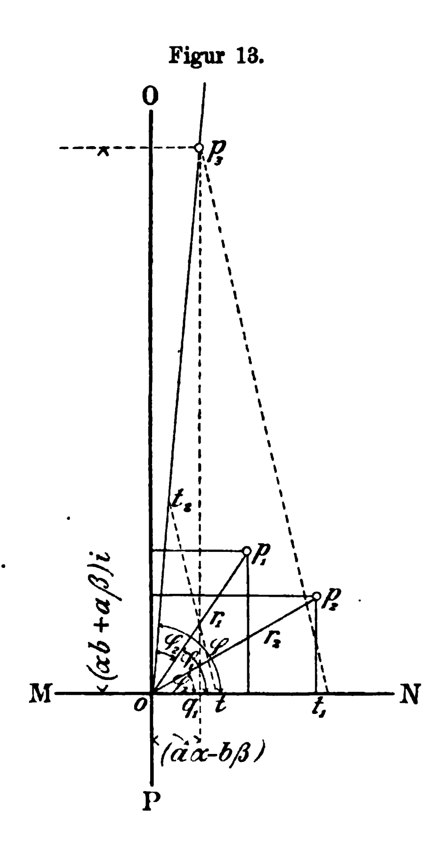
(Vergl. Erkl. 124 a).

Frage 68. Wie findet man in der Zahlenebene den Punkt, welcher das Produkt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$$

darstellt?

Figur 13.



Antwort. (Figur 13). Man ermittele in der durch das Koordinatensystem $MNOP$ bestimmten Zahlenebene die Punkte p_1 und p_2, welche die gegebenen Faktoren darstellen. Hierauf trage man an den Modulus r_1 der Komplexen $a+bi$ den Winkel φ_2, welchen der Modulus r_2 der Komplexen $\alpha+\beta i$ mit der Achse der positiven reellen Zahlen bildet, so an, dass der Winkel φ gleich der Summe der beiden Winkel φ_1 und φ_2 ist; mache ot gleich der angenommenen Längeneinheit, $ot_1=r_1$ und $ot_2=r_2$, verbinde t mit t_2 und ziehe durch t_1 zu tt_2 eine Parallele, welche die über t_2 hinaus verlängerte ot_2 in p_3 schneidet. Dann erhält man, weil die beiden Dreiecke ott_2 und ot_1p_3 ähnlich sind (nach Erkl. 125), die Proportion:

$$ot:ot_1=ot_2:op_3 \quad \text{(siehe Erkl. 126)}$$

oder:

$$1:r_1=r_2:r$$

d. h.:

$$r=r_1\cdot r_2 \quad \text{(nach Erkl. 20a)}$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle\varphi=\sphericalangle\varphi_1+\sphericalangle\varphi_2 \quad \text{(nach Konstruktion)}$$

also:

$$\cos\varphi=\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

und

$$\sin\varphi=\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

Mithin ist:

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

oder nach der Antwort auf die vorige Frage:

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

Demnach stellt Punkt p_3 das Produkt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$$

dar. Hieraus folgt der Satz:

„Der Modulus (Radiusvektor) des Produktes komplexer Zahlen bildet

Erkl. 125. Ein planimetrischer Lehrsatz lautet:

„Dreiecke, welche in zwei Paaren gleichliegender Winkel übereinstimmen, sind ähnlich."

In den Dreiecken ott_2 und ot_1p_3 (Fig. 13) ist:

$$\sphericalangle t_2ot=\sphericalangle p_3ot_1=\varphi$$

ferner:

$$\sphericalangle t_2to=\sphericalangle p_3t_1o$$

weil sie paarweise parallele und gleichgerichtete Schenkel besitzen.

Erkl. 126. In ähnlichen Dreiecken stehen die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, zu einander in demselben Verhältnisse.

Erk. 127. Ein kürzeres Verfahren besteht darin, dass man das gegebene Produkt berechnet und den Punkt ermittelt, welcher die aus der Rechnung resultierende Komplexe darstellt. Da $(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)=(a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i$ ist, so hat man auf MN (Figur 13) vom Nullpunkte aus $(a\alpha-b\beta)$ Einheiten und auf OP ebenso $(\alpha b+a\beta)$ Einheiten abzutragen und in den Endpunkten q_1 und s_1 dieser Strecken auf MN bezw. OP Normale zu errichten. Ihr Schnittpunkt p_3 ist der gesuchte Punkt.

Nach der Antwort auf Frage 87 ist:

$$r=\sqrt{(a\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

d. i.:

$$=r_1\cdot r_2$$

Ferner ist:

$$\cos\varphi=\frac{a\alpha-b\beta}{r}=\frac{a\alpha}{r_1\cdot r_2}-\frac{b\beta}{r_1\cdot r_2}$$

oder, weil $\frac{a}{r_1}=\cos\varphi_1$, $\frac{\alpha}{r_2}=\cos\varphi_2$, $\frac{b}{r_1}=\sin\varphi_1$ und $\frac{\beta}{r_2}=\sin\varphi_2$ ist:

$$\cos\varphi=\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2)\quad\text{(nach Erkl. 123)}$$

Endlich ist:

$$\sin\varphi=\frac{\alpha b+a\beta}{r}=\frac{\alpha b}{r_2\cdot r_1}+\frac{a\beta}{r_1\cdot r_2}$$

oder, weil $\frac{\alpha}{r_2}=\cos\varphi_2$, $\frac{b}{r_1}=\sin\varphi_1$, $\frac{a}{r_1}=\cos\varphi_1$ und $\frac{\beta}{r_2}=\sin\varphi_2$ ist:

$$\sin\varphi=\cos\varphi_2\cdot\sin\varphi_1+\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2=\sin(\varphi_1+\varphi_2)\quad\text{(nach Erkl. 123)}$$

Punkt p_3 stellt also die komplexe Zahl:

$$r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

dar, d. h. das Produkt:

$$r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

oder:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$$

Erkl. 128. Verbindet man p_3 (Figur 13) mit p_1 und p_2 mit t, so sind die beiden Dreiecke op_3p_1 und op_2t ähnlich (siehe Erkl. 128a). Denn es ist:

$$op_3=op_1\cdot op_2\quad\text{(nach Konstruktion)}$$

oder:

$$1\cdot op_3=op_1\cdot op_2$$

oder, da $1=ot$ ist:

$$ot\cdot op_3=op_1\cdot op_2$$

oder nach Erkl. 20:

$$ot:op_2=op_1:op_3$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle top_3=\sphericalangle top_2+\sphericalangle top_1\quad\text{(nach Konstruktion)}$$

oder:

$$\sphericalangle top_3-\sphericalangle top_1=\sphericalangle top_2$$

d. i.:

$$\sphericalangle p_1op_3=\sphericalangle top_2$$

mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel gleich der Summe der Winkel, welche die Moduln der einzelnen Faktoren mit jener Achse einschliessen, und seine Länge ist gleich dem Produkte der Moduln der einzelnen Faktoren.“

Erkl. 128a. Ein planimetrischer Lehrsatz lautet:

„Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen eines Paares von Seiten und in den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen."

Erkl. 129. Während die Lage des die Summe oder Differenz von $a + bi$ und $\alpha + \beta i$ darstellenden Punktes von der als Längeneinheit angenommenen Strecke nicht abhängt, ist der Punkt des Produktes dieser Komplexen von dieser Länge wesentlich abhängig. Denn wird letztere im Verhältnis von $1 : u$ (u irgend eine reelle Zahl bedeutend) vergrössert, so nehmen die Moduln (Radienvektoren) von $(a + bi) + (\alpha + \beta i)$ und von $(a + bi) - (\alpha + \beta i)$ in demselben Verhältnisse zu, während der Modul von $(a + bi) \cdot (\alpha + \beta i)$ im Verhältnisse $1 : u^2$ vergrössert wird.

Frage 69. Wie findet man in der Zahlenebene den das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen darstellenden Punkt?

Antwort. Setzt man für:

$$a + bi = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

so ist:

$$a - bi = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

Man erhält also für:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_1 \cdot (\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$$

Multipliziert man die beiden, auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Klammerausdrücke miteinander, so ergibt sich:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = r_1^2 \cdot (\cos^2\varphi_1 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_1 - i^2 \cdot \sin^2\varphi_1)$$

oder, da sich die Glieder $+ i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_1$ und $- i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_1$ fortheben und $i^2 = -1$ ist:

$$(a + bi)(a - bi) = r_1^2 \cdot (\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1)$$

Nun ist nach Erkl. 130:

$$\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1 = +1$$

Folglich gibt:

$$(a + bi)(a - bi) = r_1^2$$

Demnach liegt der das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen darstellende Punkt auf der Achse der positiven reellen Zahlen und in einer Entfernung von $r_1^2 = a^2 + b^2$ Einheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes.

Erkl. 130. Nach einem Satze der Goniometrie ist die Summe der Quadrate von Sinus und Cosinus eines und desselben Winkels gleich $+1$.

Frage 70. Wie lässt sich das Produkt:

a) zweier reellen Zahlen
b) zweier imaginären Zahlen
c) einer reellen und einer imaginären Zahl

d) einer reellen und einer komplexen Zahl

e) einer imaginären und einer komplexen Zahl

trigonometrisch und graphisch darstellen?

Antwort.

a) Sind beide reellen Faktoren (z. B. a und α) positiv, so ist das Produkt:

$$a \cdot \alpha = r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0) \cdot r_2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

oder:

$$= r_1 \cdot r_2$$

Der dieses Produkt darstellende Punkt liegt demnach auf der Achse der positiven reellen Zahlen und zwar in einer Entfernung von $r_1 \cdot r_2 = a \cdot \alpha$ Einheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes.

Sind beide reellen Faktoren negativ, so ist das Produkt:

$$(-a) \cdot (-\alpha) = r_1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0) \cdot r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

oder:

$$(-a) \cdot (-\alpha) = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos 360^0 + i \sin 360^0)$$

Demnach liegt der Punkt dieses Produktes auf einer Geraden, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von 360^0 bildet, d. h. auf dieser Achse und zwar in einer Entfernung von $r_1 \cdot r_2 = a \cdot \alpha$ Einheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes.

Ist ein Faktor (z. B. a) positiv, der andere (α) negativ, so erhält man:

$$(+a) \cdot (-\alpha) = r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0) \cdot r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

oder:

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

Der dieses Produkt darstellende Punkt liegt hiernach auf einer Geraden, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von 180^0 einschliesst, d. h. auf der Achse der negativen reellen Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $r_1 \cdot r_2 = a \cdot \alpha$ Einheiten.

b) Sind beide imaginären Zahlen (z. B. bi und βi) positiv, so ist das Produkt:

$$bi \cdot \beta i = r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0) \cdot r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

oder:

$$bi \cdot \beta i = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

Der das Produkt $bi \cdot \beta i$ darstellende Punkt liegt hiernach auf der Achse der negativen reellen Zahlen und ist um

$r_1 \cdot r_2 = b \cdot \beta$ Einheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes entfernt.

Sind beide imaginären Zahlen negativ, so erhält man:

$$(-bi)\cdot(-\beta i) = r_1\cdot(\cos 270^0 + i \sin 270^0)\cdot r_2\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$

oder:

$$(-bi)\cdot(-\beta i) = r_1\cdot r_2\cdot(\cos 540^0 + i\sin 540^0)$$

oder (nach Erkl. 131):

$$= r_1\cdot r_2\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$$

Mithin befindet sich der das Produkt $(-bi)\cdot(-\beta i)$ darstellende Punkt auf der Achse der positiven imaginären Zahlen und zwar in einer Entfernung von $r_1\cdot r_2 = b\cdot\beta$ Einheiten vom Nullpunkte.

Ist ein Faktor (z. B. bi) positiv, der andere (βi) negativ, so ist das Produkt:

$$(+bi)\cdot(-\beta i) =$$

$$r_1\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)\cdot r_2\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot(\cos 360^0 + i\sin 360^0)$$

Der Punkt dieses Produktes liegt demnach auf der Achse der positiven reellen Zahlen in einer Entfernung von $r_1\cdot r_2 = b\cdot\beta$ Einheiten vom Nullpunkte.

c) Wird die komplexe Zahl $a + bi$ dargestellt durch $r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und ist die reelle Zahl α positiv, so gibt das Produkt:

$$(a+bi)\cdot(+\alpha) =$$

$$r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

Der das Produkt $(a+bi)\cdot(+\alpha)$ darstellende Punkt liegt also auf dem Modulus von $(a+bi)$ in einer Entfernung von $r_1\cdot r_2 = \alpha\cdot\sqrt{a^2+b^2}$ vom Nullpunkte. Der Modulus dieses Produktes ist gleich dem α-fachen des Modulus von $(a+bi)$. (Siehe Erkl. 132.)

Ist die reelle Zahl negativ, so erhält man:

$$(a+bi)\cdot(-\alpha) =$$

$$r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot[\cos(180^0+\varphi_1) + i\sin(180^0+\varphi_1)]$$

Der Punkt dieses Produktes liegt demnach auf dem rückwärts (über den Nullpunkt hinaus) verlängerten Modulus des komplexen Faktors und zwar in einer Entfernung von $r_1\cdot r_2 = \alpha\cdot\sqrt{a^2+b^2}$

Erkl. 131. Nach einem goniometrischen Satze ist:

$$\sin(360^0+\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(360^0+\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(720^0+\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(720^0+\alpha) = \cos\alpha$$

u. s. w.

Erkl. 132. Aus der nebenstehenden Antwort ergeben sich folgende Sätze:

1) Wird eine komplexe Zahl $a+bi$ mit einer positiven reellen Zahl α multipliziert, so wird dadurch der Modulus (Radiusvektor) von $a+bi$ im Verhältnis von $1:\alpha$ vergrössert.

2) Wird eine komplexe Zahl $a+bi$ mit einer negativen reellen Zahl α multipliziert, so wird dadurch der Modulus von $a+bi$ im Verhältnis von $1:\alpha$ vergrössert und gleichzeitig um 180^0 nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

3) Wird eine komplexe Zahl $a+bi$ mit einer positiven imaginären Zahl βi multipliziert, so wird dadurch der Modulus von $a+bi$ im Verhältnis von $1:\beta$ vergrössert und gleichzeitig um 90^0 nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

4) Wird eine komplexe Zahl $a+bi$ mit einer negativen imaginären Zahl βi multipliziert, so wird dadurch der Modulus von $a+bi$ im Verhältnis von $1:\beta$ vergrössert und gleichzeitig um 270^0 nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

Aus der Antwort auf Frage 67 folgt noch:

5) Wird eine komplexe Zahl $a+bi$ mit einer andern komplexen Zahl $\alpha+\beta i$ multipliziert, so wird dadurch der Modulus im Verhältnis von 1 : (Modulus von $\alpha+\beta i$) vergrössert und gleichzeitig um den Neigungswinkel von $\alpha+\beta i$ nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

vom Nullpunkte. Der Modulus dieses Produktes ist gleich dem α-fachen des Modulus des komplexen Faktors.

d) Ist der imaginäre Faktor βi positiv, so erhält man für:

$$(a+bi)\cdot(+\beta i) = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot[\cos(90^0+\varphi_1) + i\sin(90^0+\varphi_1)]$$

Der dieses Produkt darstellende Punkt liegt also auf einer zum Modulus des komplexen Faktors normal und nach der Seite hin gerichteten Geraden, nach welcher die Neigungswinkel wachsen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $r_1\cdot r_2 = \beta\cdot\sqrt{a^2+b^2}$ Einheiten. Der Modulus dieses Produktes ist gleich dem β-fachen des Modulus des komplexen Faktors.

Ist der imaginäre Faktor βi negativ, so ergibt sich:

$$(a+bi)\cdot(-\beta i) = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot[\cos(270^0+\varphi_1) + i\sin(270^0+\varphi_1)]$$

Dieses Produkt wird dargestellt durch einen Punkt, welcher auf einer zum Modulus des komplexen Faktors normal und nach der Seite hin gerichteten Geraden liegt, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen. Er ist vom Nullpunkte des Linienkreuzes um $r_1\cdot r_2 = \beta\cdot\sqrt{a^2+b^2}$ Einheiten entfernt. Der Modulus von $(a+bi)\cdot(-\beta i)$ ist gleich dem β-fachen vom Modulus des komplexen Faktors (siehe Erkl. 132).

α) Gelöste Aufgaben.

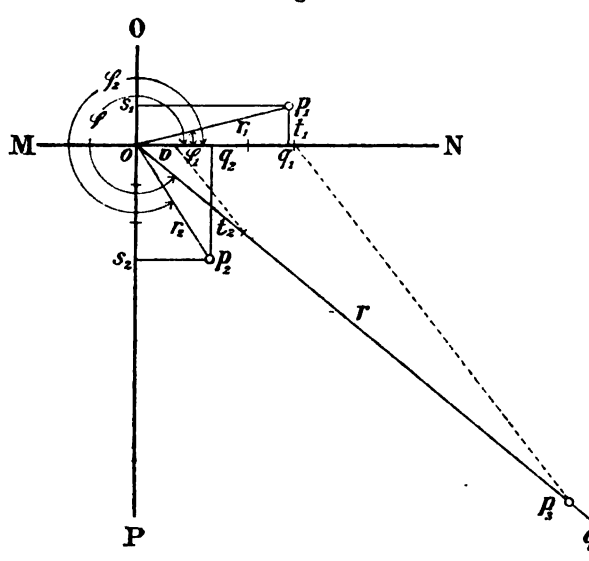
Aufgabe 51. Es ist das Produkt:

$$(4+i)\cdot(2-3i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Auflösung. (Figur 14.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +4$, $os_1 = +i$, $oq_2 = +2$ und $os_2 = -3i$ auf MN bezw. OP Normale, dann erhält man in ihren Schnittpunkten p_1 und p_2 die Punkte, welche die gegebenen Faktoren darstellen. Hierauf verbinde man p_1 und p_2 mit o und trage an die Linie $op_1 = r_1$ den Winkel $q_2op_2 = \varphi_2$ so an, dass der Winkel $q_1oq_3 = q_2op_2 + q_1op_1$ wird. Alsdann mache man $ot_1 = op_1 = r_1$ und $ot_2 = op_2 = r_2$ und verbinde r (den Endpunkt der Strecke $or = +1$) mit t_2. Endlich ziehe man

Figur 14.



durch t_1 eine Parallele zu $v\,t_2$ bis zum Schnittpunkte p_3 mit dem Schenkel $o\,q_3$ des Winkels $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Dann ist p_3 der Punkt, welcher das **Produkt** $(4+i)\cdot(2-3i)$ darstellt.

Trigonometrisch erhält man für:

$$4 + i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17} = 4{,}123\cdot\cdot$$

und

$$\varphi_1 = 14^0\ 2'\ 10''$$

ist (nach Erkl. 133):

$$4+i = 4{,}123\cdot(\cos 14^0\ 2'\ 10'' + i\sin 14^0\ 2'\ 10'')$$

Ferner ist:

$$2 - 3i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2 = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$$

und

$$\varphi_2 = 303^0\ 41'\ 23''$$

ist (nach Erkl. 134):

$$2 - 3i = 3{,}606\cdot(\cos 303^0\ 41'\ 23'' + i\sin 303^0\ 41'\ 23'')$$

Mithin erhält man für:

$$(4+i)\cdot(2-3i) = 4{,}123\cdot(\cos 14^0\ 2'\ 10'' + i\sin 14^0\ 2'\ 10'')\cdot 3{,}606\cdot(\cos 303^0\ 41'\ 23'' + i\sin 303^0\ 41'\ 23'')$$

oder (nach Antwort auf Frage 57):

$$(4+i)\cdot(2-3i) = 14{,}87\cdot(\cos 317^0\ 43'\ 33'' + i\sin 317^0\ 43'\ 33'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$= 14{,}87\cdot(\cos 42^0\ 16'\ 27'' - i\sin 42^0\ 16'\ 27'')$$

Erkl. 133. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{+1}{+4} = +0{,}25$ ist, so liegt φ_1 im ersten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}25000$$
$$\operatorname{tg} 14^0\ 0' = 0{,}24933$$
$$\text{Rest: } 67$$

Differenz für 1 Minute = 30,9. Zum Winkel 14° kommen also noch:

$$\frac{67}{30{,}9} = 2\,\frac{52'}{309} = 2'\ 10''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 14^0\ 2'\ 10''$$

Erkl. 134. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{-3}{+2} = -1{,}5$ ist, so liegt φ_2 im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = 1{,}5000$$
$$\operatorname{tg} 56^0\ 10' = 1{,}4919$$
$$\text{Rest: } 81$$

Differenz für 1 Minute = 9,4. Zum Winkel 56° 10′ kommen also noch:

$$\frac{81}{9{,}4} = 8\,\frac{29'}{47} = 8'\ 37''$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 360^0 - 56^0\ 18'\ 37'' = 303^0\ 41'\ 23'$$

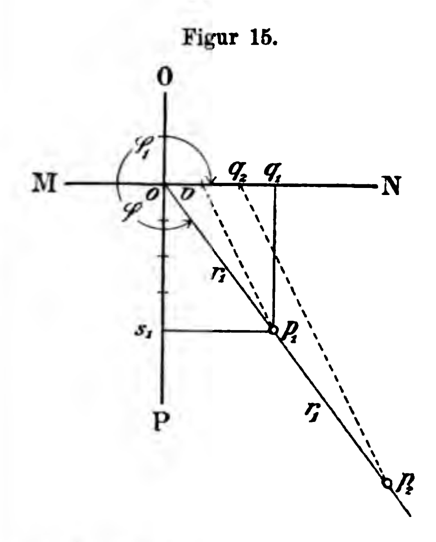
Aufgabe 52. Es ist in der Zahlenebene der das Produkt:

$$(3-4i)\cdot(+2)$$

darstellende Punkt zu ermitteln und dieses Produkt trigonometrisch zu berechnen.

Auflösung. (Figur 15.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $o\,q_1 = +3$ und $o\,s_1 = -4i$ auf MN bezw. OP **Normale.**

Figur 15.



Erkl. 135. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-4}{+3} = -1{,}3333\cdots$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 1{,}3333$$
$$\operatorname{tg} 53^0\,0' = 1{,}3270$$
$$\text{Rest: } 67$$

Differenz für 1 Minute = 8,1. Zum Winkel 53⁰ kommen also noch:

$$\frac{68}{8{,}1} = 7\frac{7'}{9} = 7'\,47''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 360^0 - 53^0\,7'\,47'' = 306^0\,52'\,18''$$

Ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den ersten Faktor des gegebenen Produktes dar. Der Punkt des zweiten Faktors (+ 2) liegt auf der Achse der positiven reellen Zahlen und ist q_2. Der Modulus dieses Faktors oq_2 schliesst mit der Hauptachse einen Winkel von 0^0 ein, daher ist $\varphi = \varphi_1 + 0^0 = \varphi_1$. Man verbinde p_1 mit o und verlängere diese Gerade über p_1 hinaus; man verbinde ferner v (den Endpunkt der Strecke $ov = +1$) mit p_1 und ziehe durch q_2 eine Parallele, welche die verlängerte op_1 in p_2 schneidet. Dann ist p_2 der Punkt, welcher das gegebene Produkt darstellt. Er ist um $2r_1$ Einheiten vom Nullpunkt des Linienkreuzes entfernt [vergl. Erkl. 132, 1)].

Trigonometrisch erhält man für:

$$3 - 4i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

und

$$\varphi_1 = 306^0\,52'\,13''$$

ist (nach Erkl. 135):

$$3 - 4i = 5\cdot(\cos 306^0\,52'\,13'' + i\sin 306^0\,52'\,13'')$$

Ferner ist:

$$+2 = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da $r_2 = 2$ und $\varphi_2 = 0^0$ ist:

$$+2 = 2\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

Mithin erhält man für:

$$(3 - 4i)\cdot(+2) =$$
$$10\cdot(\cos 306^0\,52'\,13'' + i\sin 306^0\,52'\,13'')$$

oder (nach Erkl. 101):

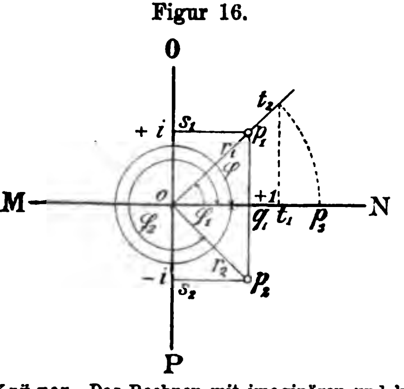
$$= 10\cdot(\cos 53^0\,7'\,47'' + i\sin 53^0\,7'\,47'')$$

Aufgabe 53. Es ist das Produkt der beiden konjugierten komplexen Zahlen:

$$(1 + i) \text{ und } (1 - i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Figur 16.



Auflösung. (Figur 16.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +1$, $os_1 = +i$ und $os_2 = -i$ auf MN bezw. OP Normale, dann erhält man in ihren Schnittpunkten p_1 und p_2 die Punkte, welche die gegebenen Faktoren darstellen. Hierauf verbinde man p_1 und p_2 mit o und trage an op_1 den Winkel $q_1op_2 = \varphi_2$ so an, dass der Winkel $\varphi = q_1op_1 + q_1op_2$, d. i. $= \varphi_1 + \varphi_2$ wird. Alsdann verlängere man op_1 über p_1 hinaus, trage $op_2 = r_2$ auf oN von o aus ab und ziehe durch den Endpunkt t_1 dieser Strecke eine Parallele zu q_1p_1, welche die verlängerte op_1 in t_2 schneidet. Dann findet statt:

$$op_1 : ot_2 = oq_1 : ot_1$$

oder:

$$r_1 : ot_2 = +1 : r_2$$

d. i.:

$$ot_2 = r_1\cdot r_2$$

Endlich schlage man mit ot_2 um o einen Kreisbogen, welcher oN in p_3 schneidet. Dann ist p_3 der Punkt, welcher das Produkt $(1+i)(1-i)$ darstellt (vergl. Antwort auf Frage 69).

Trigonometrisch erhält man für:

$$1+i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

und

$$\varphi_1 = 45^0$$

ist (nach Erkl. 136):

$$1+i = 1{,}414\cdot(\cos 45^0 + i\sin 45^0)$$

Ferner ist:

$$1-i = 1{,}414\cdot(\cos 315^0 + i\sin 315^0)$$

(siehe Erkl. 136)

Mithin gibt:

$$(1+i)\cdot(1-i) = 1{,}414^2\cdot(\cos 360^0 + i\sin 360^0)$$

oder:

$$= 2\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

d. i.:

$$= 2$$

Erkl. 136. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+1}{+1} = +1$ ist, so liegt φ_1 im ersten Quadranten und man erhält:

$$\varphi_1 = 45^0$$

Der Winkel φ_2 liegt im vierten Quadranten und ist:

$$= 360^0 - 45^0 = 315^0$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 54. Es ist das Produkt:

$$(-2-i)\cdot(-3+2i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 51.

Aufgabe 55. Es ist in der Zahlenebene der das Produkt:

$$(-4+5i)\cdot(-2i)$$

darstellende Punkt zu ermitteln und das Produkt trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Die Auflösung geschieht nach der Antwort auf Frage 70, **d)** und nach Erkl. 132, 4).

Aufgabe 56. Es ist das Produkt der beiden konjugierten komplexen Zahlen:

$$(-2+5i)\cdot(-2-5i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 53.

3) Ueber das graphische und trigonometrische Dividieren.

Frage 71. Wie lässt sich der Quotient:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

trigonometrisch darstellen?

Antwort. Ist:

$$a+bi = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

und

$$\alpha+\beta i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

so erhält man für:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung mit dem Konjugierten des Nenners, also mit:

$$r_2\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$$

so ergibt sich:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}$$

oder:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 - i^2\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)}{r_2\cdot r_2\cdot(\cos^2\varphi_2 + i\sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_2\cdot\sin\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2)}$$

oder, weil $i^2 = -1$, ferner:

$$\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$
$$\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

(nach Erkl. 137)

und

$$\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2 = +1 \quad \text{(nach Erkl. 130)}$$

ist und sich ferner die Glieder:

$$+i\sin\varphi_2\cos\varphi_2 \quad \text{und} \quad -i\sin\varphi_2\cos\varphi_2$$

sowie ein Faktor r_2 im Zähler und Nenner fortheben:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Hieraus folgt der Satz:

„Komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Moduln dividiert und die Amplituden subtrahiert.“

Erkl. 137. Nach einem Satze der Goniometrie ist:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Frage 72. Wie lässt sich der reciproke Wert von $a+bi$ (siehe Erkl. 15) trigonometrisch darstellen?

Antwort. Man erhält für:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}$$

und wenn man Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung mit dem Konjugierten des Nenners, also mit:

$$r_1\cdot(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$$

multipliziert:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)}{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_1\cdot(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)}$$

oder:

$$= \frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)}{r_1\cdot r_1\cdot(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1)} = \frac{1}{r_1}\cdot(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$$

Frage 73. Wie findet man in der Zahlenebene durch Zeichnung den Punkt, welcher den Quotienten:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

darstellt?

Antwort. (Fig. 17.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +a$, $os_1 = +bi$, $oq_2 = +\alpha$ und $os_2 = +\beta i$ auf MN bezw. OP Normale. Ihre Schnittpunkte p_1 und p_2 stellen dann die kom-

plexen Zahlen $a+bi$ bezw. $\alpha+\beta i$ in der durch das Linienkreuz bestimmten Zahlenebene dar. Hierauf verbinde man p_1 und p_2 mit o und trage an $op_1 = r_1$ den Winkel $p_2 o q_2$ so an, dass Winkel $qoN = p_1 o q_1 - p_2 o q_2$ wird. Alsdann mache man $ot_1 = r_2$ und $ov = 1$ (der angenommenen Längeneinheit), verbinde v mit t_1 und ziehe durch p_1 zu $t_1 v$ eine Parallele bis zum Schnittpunkte p_3 mit oq.

Dann erhält man (nach Erkl. 126):

$$op_1 : ot_1 = op_3 : ov$$

oder:

$$r_1 : r_2 = op_3 : 1$$

daraus folgt:

$$op_3 = r = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{(nach Erkl. 20 a)}$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle \varphi = \sphericalangle \varphi_1 - \sphericalangle \varphi_2 \quad \text{(nach Konstruktion)}$$

also:

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

und

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Mithin ist:

$$r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

oder nach der Antwort auf Frage 71:

$$r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

Demnach stellt Punkt p_3 den Quotienten:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

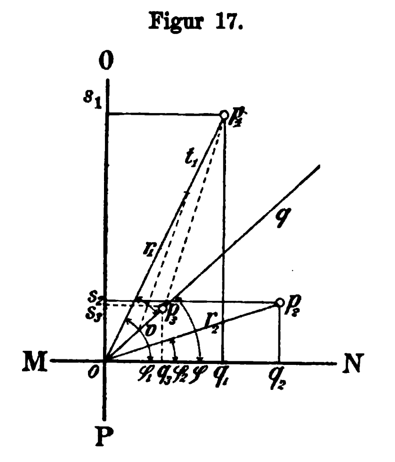
dar.

Aus dieser Konstruktion ergibt sich folgender Satz:

„Der Modulus (Radiusvektor) des Quotienten zweier komplexen Zahlen ist gleich dem Quotienten des Modulus des Dividendus durch den des Divisors und bildet mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel gleich der Differenz der Winkel, welche die Moduln des Dividendus und des Divisors mit jener Achse einschliessen."

(Vergl. Erkl. 139.)

Figur 17.



Erkl. 188. Ein zweites Verfahren zur Ermittelung des Punktes, welcher den Quotienten:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

darstellt, besteht darin, dass man den Quotienten berechnet und den Punkt der resultierenden Komplexen in der Zahlenebene aufsucht. Da (nach Antwort auf Frage 38):

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2} + i\cdot\frac{(a\beta-\alpha b)}{\alpha^2+\beta^2}$$

gibt, so hat man auf der Achse der reellen Zahlen im Endpunkte der Strecke:

$$oq_3 = \frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

und auf der Achse der imaginären Zahlen im Endpunkte der Strecke:

$$os_3 = \frac{a\beta-\alpha b}{\alpha^2+\beta^2}$$

Normale zu errichten. Ihr Schnittpunkt p_3 stellt dann den gegebenen Quotienten dar.

Erkl. 189. Ist die Amplitude des Divisors grösser als die des Dividendus, so gibt $(\varphi_1 - \varphi_2)$ einen negativen Winkel φ. Dann bildet der Modulus des Quotienten mit der Achse der positiven reellen Zahlen den Winkel $(360^0 - \varphi)$. (Siehe Erkl. 142. Vergl. die Aufgaben 57 und 58.)

Erkl. 140. Die graphische Darstellung der Division komplexer Zahlen besteht nach nebenstehender Antwort also darin, dass der Modulus (Radiusvektor) des Dividendus im Verhältnisse von (Modulus des Divisors) : 1 geändert und gleichzeitig um die Amplitude des Divisors nach der Richtung gedreht wird, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen.

Frage 74. Wie lässt sich der Quotient
a) zweier reellen Zahlen
b) einer reellen Zahl durch eine imaginäre Zahl
c) zweier imaginären Zahlen
d) einer imaginären Zahl durch eine reelle Zahl

trigonometrisch ausdrücken und wo liegt in der Zahlenebene der Punkt, welcher diesen Quotienten darstellt?

Antwort.

a) Sind Zähler und Nenner positive reelle Zahlen (z. B. $+a$ und $+\alpha$), so erhält man:

$$\frac{+a}{+\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)}{r_2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)} \Big\} \text{(nach Antwort auf Frage 59)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2}$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt demnach auf der Achse der positiven reellen Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Sind Zähler und Nenner negative reelle Zahlen, so ergibt sich:

$$\frac{-a}{-\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)}{r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)} = \frac{r_1}{r_2}$$

Demnach liegt der Punkt des Quotienten $\frac{-a}{-\alpha}$ auf der Achse der positiven reellen Zahlen und ist um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Ist der Zähler positiv, der Nenner negativ, so folgt:

$$\frac{+a}{-\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)}{r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (0^0 - 180^0) + i \sin (0^0 - 180^0)]$$

(nach Antwort auf Frage 71)

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (-180^0) + i \sin (-180^0)]$$

oder (nach Erkl. 141):

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 180^0 - i \sin 180^0) \quad \text{(s. Erkl. 142)}$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt also auf der Achse der negativen reellen Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten.

Ist der Zähler negativ, der Nenner positiv, so folgt:

$$\frac{-a}{+\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)}{r_2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (180^0 - 0^0) + i \sin (180^0 - 0^0)]$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

Erkl. 141. Für die Winkel aller Quadranten findet nach einem Satze der Goniometrie statt:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$$
$$\mathrm{cotg}(-\alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha$$

Erkl. 142. Ist $\sphericalangle \varphi_2 > \sphericalangle \varphi_1$, so ist das zweite Glied des Richtungskoëffizienten (vergl. Antwort auf Frage 58) negativ (s. Erkl. 139).

Erkl. 143. Aus der Antwort auf Frage 74, a) ergibt sich folgender Satz:

„Der Modulus (Radiusvektor) des Quotienten zweier reellen Zahlen $\frac{a}{\alpha}$ ist gleich der α-fachen Verkleinerung des Modulus von a und fällt mit der Achse der reellen Zahlen zusammen.“

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf der Achse der negativen reellen Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte (vergl. Erkl. 143).

b) Ist der Zähler eine positive reelle Zahl, der Nenner eine positive imaginäre Zahl (z. B. $+a$ und $+\beta i$), so erhält man:

$$\frac{+a}{+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)}{r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)} \quad \text{(nach Antwort auf Frage 59)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (0^0 - 90^0) + i \sin (0^0 - 90^0)] \quad \text{(nach Antwort auf Frage 71)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 - i \sin 90^0) \quad \text{(nach Erkl. 141)}$$

Demnach liegt der Punkt des Quotienten von $\frac{+a}{+\beta i}$ auf der Achse der negativen imaginären Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Erkl. 144. Aus der Antwort auf Frage 74, b) folgt der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer reellen Zahl a durch eine imaginäre βi ist gleich der β-fachen Verkleinerung des Modul von a und zu letzterem normal gerichtet, d. h. mit der Achse der imaginären Zahlen zusammenfallend."

Ist der Zähler eine positive reelle Zahl, der Nenner eine negative imaginäre Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{+a}{-\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)}{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)} \quad \text{(nach Antwort auf Frage 59)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (-270^0) + i \sin (-270^0)] = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 270^0 - i \sin 270^0)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt demnach auf der Achse der positiven imaginären Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten.

Ist der Zähler eine negative reelle Zahl, der Nenner eine positive imaginäre Zahl, so folgt:

$$\frac{-a}{+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)}{r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf der Achse der positiven imaginären Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Ist der Zähler eine negative reelle Zahl, der Nenner eine negative imaginäre Zahl, so erhält man:

$$\frac{-a}{-\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)}{r_2 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 - i \sin 90^0)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der negativen imaginären Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\beta}$ Einheiten (vergl. Erkl. 144).

c) Sind **Zähler und Nenner positive imaginäre** Zahlen, so ergibt sich:

$$\frac{+bi}{+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)} = \frac{r_1}{r_2}$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der positiven reellen Zahlen und ist um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Sind Zähler und Nenner **negative imaginäre** Zahlen, so erhält man:

$$\frac{-bi}{-\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)}{r_2 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)} = \frac{r_1}{r_2}$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt also auf der Achse der positiven reellen Zahlen in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Ist der **Zähler** eine **positive**, der **Nenner** eine **negative imaginäre** Zahl, so folgt:

$$\frac{+bi}{-\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 180^0 - i \sin 180^0)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der negativen reellen Zahlen und zwar um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Erkl. 145. Aus der Antwort auf Frage 74, c) folgt der Satz:

„Der Modulus des Quotienten zweier imaginären Zahlen $\left(\frac{bi}{\beta i}\right)$ ist gleich der β-fachen Verkleinerung des Modulus von bi und zu letzterem normal gerichtet."

Ist der Zähler eine **negative**, der Nenner eine **positive imaginäre** Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{-bi}{+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)}{r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf der Achse der negativen reellen Zahlen und zwar um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt (vgl. Erkl. 145).

d) Ist der Zähler eine **positive imaginäre** und der Nenner eine **positive reelle** Zahl, so erhält man:

$$\frac{+bi}{+\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der positiven

imaginären Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{a}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Ist der Zähler eine positive imaginäre und der Nenner eine negative reelle Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{+bi}{-a} = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 - i \sin 90^0)$$

Der Punkt von $\frac{+bi}{-a}$ liegt auf der Achse der negativen imaginären Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{a}$ Einheiten.

Ist der Zähler eine negative imaginäre Zahl, der Nenner eine positive reelle Zahl, so folgt:

$$\frac{-bi}{+a} = \frac{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)}{r_2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der negativen imaginären Zahlen und zwar um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{a}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Erkl. 146. Aus der Antwort auf Frage 74, d) ergibt sich der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer imaginären Zahl bi durch eine reelle Zahl a ist gleich der a-fachen Verkleinerung des Modulus von bi und fällt entweder mit letzterem zusammen oder bildet seine Verlängerung."

Ist der Zähler eine negative imaginäre und der Nenner eine negative reelle Zahl, so erhält man:

$$\frac{-bi}{-a} = \frac{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)}{r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf der Achse der positiven imaginären Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{a}$ Einheiten (vgl. Erkl. 146).

Frage 75. Wie lässt sich der Quotient:

a) einer reellen Zahl durch eine komplexe Zahl
b) einer komplexen Zahl durch eine reelle Zahl
c) einer imaginären Zahl durch eine komplexe Zahl
d) einer komplexen Zahl durch eine imaginäre Zahl

trigonometrisch und graphisch darstellen, wenn die komplexe Zahl nur positive Glieder hat? (Siehe nachfolgende Erklärung.)

Antwort.

a) Ist der Zähler eine positive reelle Zahl (z. B. $+a$), der Nenner eine komplexe Zahl (z. B. $\alpha + \beta i$), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{+a}{\alpha + \beta i} &= \frac{r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)}{r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) \end{aligned}\right\} \text{(nach Antwort auf Frage 71)}$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt demnach auf einer Geraden, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von $(360^0 - \varphi_2)$ einschliesst (siehe Erkl. 139 und 142). Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ Einheiten.

Erkl. 147. Es würde zu weit führen, wollten wir hier auch alle die Fälle berücksichtigen, wo ein Glied der komplexen Zahl negativ ist oder es beide Glieder sind. Die trigonometrische und graphische Darstellung solcher Quotienten muss dem Studierenden überlassen bleiben. (Siehe übrigens die Aufgaben 57 und 58.)

Ist der Zähler eine negative reelle Zahl, der Nenner eine komplexe Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{-a}{\alpha + \beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)}{r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (180^0 - \varphi_2) + i \sin (180^0 - \varphi_2)]$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt also auf einer zum Modulus der Komplexen einen Winkel von $(180^0 - \varphi_2)$ bildenden und nach der Seite hin geneigten Geraden, nach welcher die Neigungswinkel wachsen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ Einheiten (vergl. Erkl. 147 a).

Erkl. 147a. Aus der Antwort auf Frage 75, a) folgt der Satz:

„Der Modulus (Radiusvektor) des Quotienten einer reellen Zahl a durch eine komplexe Zahl $\alpha + \beta i$ ist im Verhältnisse von $1 : (\text{Modulus von } \alpha + \beta i)$ kleiner als der Modulus von a."

b) Ist der Zähler eine komplexe Zahl (z. B. $a + bi$), der Nenner eine positive reelle Zahl (α), so folgt:

$$\frac{a + bi}{+\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt demnach auf dem Modulus des Zählers und zwar um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Erkl. 148. Aus der Antwort auf Frage 75, b) folgt der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer komplexen Zahl $a + bi$ durch eine reelle Zahl α ist gleich der α-fachen Verkleinerung des Modulus von $a + bi$ und fällt entweder mit letzterem zusammen oder bildet seine Verlängerung."

Ist der Zähler eine komplexe Zahl, der Nenner eine negative reelle Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{a + bi}{-\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (\varphi_1 - 180^0) + i \sin (\varphi_1 - 180^0)]$$

oder, da $\varphi_1 < 90^0$ ist (wegen der Annahme, dass die komplexe Zahl nur positive Glieder besitzen soll):

$$\frac{a + bi}{-\alpha} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (180^0 - \varphi_1) - i \sin (180^0 - \varphi_1)]$$

Der Punkt von $\frac{a + bi}{-\alpha}$ liegt demnach auf dem rückwärts (über den Nullpunkt hinaus) verlängerten Modulus von $a + bi$ und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte (vergl. Erkl. 148).

c) Ist der Zähler eine positive imaginäre Zahl und der Nenner eine komplexe Zahl, so erhält man:

$$\frac{+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos 90^0 - \varphi_2) + i\sin(90^0 - \varphi_2)]$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt also auf einer zur Achse der positiven reellen Zahlen unter einem Winkel von $(90^0 - \varphi_2)$ geneigten Geraden und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Erkl. 149. Aus der Antwort auf Frage 75, c) ergibt sich der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer imaginären Zahl bi durch eine komplexe Zahl $\alpha+\beta i$ ist im Verhältnisse von 1 : (Modulus von $\alpha+\beta i$) kleiner als der Modulus von bi.“

Ist der Zähler eine negative imaginäre Zahl, der Nenner eine komplexe Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{-bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(270^0 - \varphi_2) + i\sin(270^0 - \varphi_2)]$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt also auf einer zur Achse der positiven reellen Zahlen unter einem Winkel von $(270^0 - \varphi_2)$ geneigten Geraden und zwar um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt (vergl. Erkl. 149).

d) Ist der Zähler eine komplexe Zahl, der Nenner eine positive imaginäre Zahl, so erhält man:

$$\frac{a+bi}{+\beta i} = \frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_1\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1 - 90^0) + i\sin(\varphi_1 - 90^0)]$$

oder, da $\varphi_1 < 90^0$ ist:

$$\frac{a+bi}{+\beta i} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(90^0 - \varphi_1) - i\sin(90^0 - \varphi_1)]$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf einer zum Modulus des Zählers normal und nach der Seite hin geneigten Geraden, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\beta}$ Einheiten.

Ist der Zähler eine komplexe Zahl und der Nenner eine negative imaginäre Zahl, so folgt:

$$\frac{a+bi}{-\beta i} = \frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)} = \frac{r_1}{r_1}\cdot[\cos(\varphi_1 - 270^0) + i\sin(\varphi_1 - 270^0)]$$

oder, da $\varphi_1 < 90^0$ ist:

$$\frac{a+bi}{-\beta i} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(270^0 - \varphi_1) - i\sin(270^0 - \varphi_1)]$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf einer zum Modulus der Komplexen

Erkl. 150. Aus der Antwort auf Frage 75, d) folgt der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer komplexen Zahl $a+bi$ durch eine imaginäre Zahl βi ist gleich der β-fachen Verkleinerung des Modul von $a+bi$ und zu letzterem normal gerichtet.“

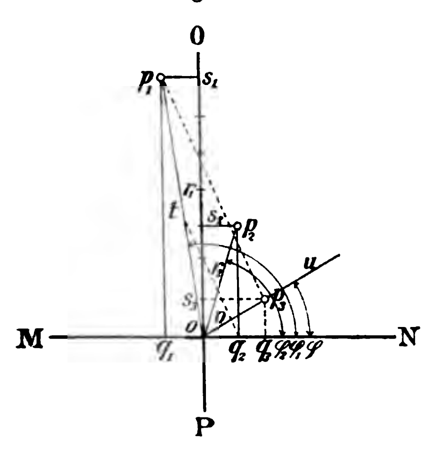
normal stehenden und nach der Seite hin geneigten Geraden, nach welcher die Neigungswinkel zunehmen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt
$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\beta}$ Einheiten (vgl. Erkl. 150).

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 57. Nachfolgende Quotienten sind graphisch und trigonometrisch darzustellen:

a) $\frac{-1+7i}{+1+3i}$

Figur 18.



Auflösungen.

a) (Figur 18). Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = -1$, $os_1 = +7$, $oq_2 = +1$ und $os_2 = +3$ Normale auf MN bezw. OP. Ihre Schnittpunkte p_1 und p_2 stellen dann den Zähler, bezw. den Nenner des gegebenen Bruches dar. Hierauf verbinde man p_1 und p_2 mit o und trage an $op_1 = r_1$ den Winkel $p_2oq_2 = \varphi_2$ des komplexen Nenners so an, dass Winkel $uoN = p_1oq_2 - p_2oq_2$ wird. Alsdann mache man $ot = r_2$ und $ov = oq_2 = 1$, verbinde t mit v und ziehe durch p_1 zu tv eine Parallele bis zum Schnitte mit der Geraden ou. Der Schnittpunkt p_3 stellt dann den gegebenen Quotienten dar (nach Antwort auf Frage 73).

Trigonometrisch erhält man, wenn man:

$$-1+7i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$+1+3i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

und

$$\frac{-1+7i}{+1+3i} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

setzt, für:

$$\left.\begin{aligned}\frac{-1+7i}{+1+3i} &= r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}\\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]\end{aligned}\right\}\text{(nach Antwort auf Frage 71)}$$

Nun ist:

$$r_1 = \sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{50} = 7{,}071$$
$$r_2 = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} = 3{,}162$$
$$\varphi_1 = 98^0\,7'\,51'' \quad \text{(nach Erkl. 151)}$$
$$\varphi_2 = 71^0\,33'\,54'' \quad \text{(nach Erkl. 152)}$$

Folglich gibt:

$$\frac{-1+7i}{+1+3i} = \frac{7{,}071}{3{,}162}\cdot$$
$$[\cos(98^0\,7'\,51'' - 71^0\,33'\,54'')$$
$$+ i\sin(98^0\,7'\,51'' - 71^0\,33'\,54'')]$$
$$= 2{,}236\cdot(\cos 26^0\,33'\,57'' + i\sin 26^0\,33'\,57'')$$

Demnach ist:

$$r = 2{,}236$$

und

$$\sphericalangle\,\varphi = 26^0\,33'\,57''$$

Erkl. 151. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{7}{-1} = -7$ ist, so liegt φ_1 im zweiten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

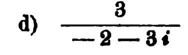
$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 7{,}0000$$
$$\operatorname{tg} 81^0\,50' = \underline{6{,}9682}$$
$$\text{Rest: } 318$$

Differenz für 1 Minute = 147,2. Zum Winkel $81^0\,50'$ kommen also noch:

$$\frac{318}{147{,}2} = 2\frac{59'}{368} = 2'\,9''$$

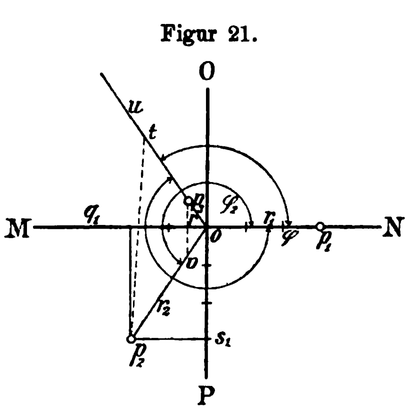
Mithin ist:

$$\varphi_1 = 180^0 - 81^0\,52'\,9'' = 98^0\,7'\,51''$$



d) $\frac{3}{-2-3i}$

Figur 21.



Erkl. 155. Da $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{-3}{-2} = +1{,}5$ ist, so liegt φ_2 im dritten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = 1{,}5000$$
$$\operatorname{tg} 56^0\,10' = 1{,}4919$$
$$\text{Rest: } 81$$

Differenz für 1 Minute = 9,4. Zum Winkel 56° 10′ kommen also noch:

$$\frac{81}{9{,}4} = 8\frac{29'}{47} = 8'\,37''$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 180^0 + 56^0\,18'\,37'' = 236^0\,18'\,37''$$

d) (Figur 21). Der den Zähler des gegebenen Bruches darstellende Punkt liegt auf der Achse der positiven reellen Zahlen in einer Entfernung von 3 Einheiten vom Nullpunkt und ist p_1. Der Schnittpunkt p_2 der beiden, in den Endpunkten $oq_1 = -2$ und $os_1 = -3i$ auf MN bezw. OP errichteten Normalen stellt den gegebenen komplexen Nenner dar. Man verbinde p_2 mit o und lege an die Gerade oN den Winkel p_1op_2 so an, dass Winkel $uoN = Nop_2$ wird. Hierauf mache man $ov = 1$ und $ot = op_1 = r_1$, verbinde t mit p_2 und ziehe durch v eine Parallele zu tp_2 bis zum Schnitte mit ot. Der Schnittpunkt p_3 stellt dann den gegebenen Bruch dar. Denn nach Erkl. 126 findet statt:

$$ov : op_2 = op_3 : ot$$

oder:

$$1 : r_2 = r : r_1$$

d. i.:

$$r = \frac{r_1}{r_2}$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle \varphi = \sphericalangle 0^0 - \sphericalangle \varphi_2$$

Demnach ist p_3 der Punkt der Komplexen:

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(0^0 - \varphi_2) + i \sin(0^0 - \varphi_2)]$$

oder:

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)$$ (siehe Antwort auf Frage 75, a)

Trigonometrisch erhält man, da:

$$3 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)$$
$$-2 - 3i = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

und

$$\frac{3}{-2-3i} = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

ist, für:

$$\frac{3}{-2-3i} = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)$$

Nun ist:

$$r_1 = 3$$
$$r_2 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$$

und

$$\varphi_2 = 236^0\,18'\,37''$$ (nach Erkl. 155)

folglich gibt:

$$\frac{3}{-2-3i} = \frac{3}{3{,}606} \cdot (\cos 236^0\,18'\,37'' - i \sin 236^0\,18'\,37'')$$

oder:

$$= 0{,}832\,(-\cos 56^0\,18'\,37'' + i \sin 56^0\,18'\,37'')$$ (nach Erkl. 101)

Demnach ist:

$$r = 0{,}832$$

und es bildet dieser Modulus mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von:

$$180^0 - 56^0\,18'\,37'' = 123^0\,41'\,23''$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 58. Nachfolgende Quotienten sind graphisch und trigonometrisch darzustellen:

a) $\frac{2+5i}{1-4i}$

b) $\frac{+2+i}{-4i}$

c) $\frac{1}{-3-4i}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 57, a).

b) Die Auflösung geschieht nach der Antwort auf die Fragen 73 und 75, d).

c) Die Auflösung erfolgt nach der Antwort auf die Fragen 72 und 73.

---

4) Ueber das graphische und trigonometrische Potenzieren.

Frage 76. Wie lässt sich die Potenz einer komplexen Zahl trigonometrisch darstellen, wenn der Exponent:

a) eine positive,

b) eine negative,

ganze und reelle Zahl ist?

Antwort.

a) Es sei der Potenzexponent n eine positive, ganze und reelle Zahl, und die komplexe Zahl:

$$a+bi = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Dann erhält man für:

$$(a+bi)^2 = [r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^2 = r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

oder (nach Antwort auf Frage 67):

$$= r^2\cdot[\cos(\varphi+\varphi)+i\sin(\varphi+\varphi)]$$

d. i.:

$$(a+bi)^2 = r^2\cdot(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

Multipliziert man $(a+bi)^2$ mit $(a+bi)$, so ergibt sich:

$$(a+bi)^3 = r^2\cdot(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)\cdot r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

oder:

$$= r^3\cdot(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)$$

Erkl. 156. Die zur Berechnung der Potenzen komplexer Zahlen dienende Formel:

$$(a+bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

wird nach ihrem Erfinder, dem Mathematiker Moivre, die „Moivresche Formel“ und das in ihr liegende Gesetz der „Moivresche Satz“ genannt.

Setzt man die Multiplikation mit $(a+bi)$ fort, so erhält man:

$$(a+bi)^4 = r^4\cdot(\cos 4\varphi+i\sin 4\varphi)$$

oder ganz allgemein:

$$(a+bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

(vergl. Erkl. 156)

b) Ist n eine negative, ganze und reelle Zahl, so hat man:

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{(a+bi)^n} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

und

$$[r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^{-n} = \frac{1}{[r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n}$$

oder (nach vorstehender Antwort):

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{r^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}$$

Multipliziert man den Zähler und den Nenner dieses Bruches mit dem Konjugierten des Nenners, also mit:

$$r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)$$

so erhält man:

$$(a + bi)^{-n} = \frac{r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)}{r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \cdot r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)}$$

oder, wenn man die beiden Klammerausdrücke im Nenner miteinander multipliziert:

$$(a + bi)^{-n} = \frac{r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)}{r^n \cdot r^n \cdot (\cos^2 n\varphi + i \sin n\varphi \cdot \cos n\varphi - i \sin n\varphi \cdot \cos n\varphi - i^2 \cdot \sin^2 n\varphi)}$$

oder gekürzt:

$$(a + bi)^{-n} = \frac{\cos n\varphi - i \sin n\varphi}{r^n \cdot (\cos^2 n\varphi - i^2 \cdot \sin^2 n\varphi)}$$

oder, da:

$$-i^2 = +1$$

und

$$\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi = +1$$

ist (nach Erkl. 130):

$$(a + bi)^{-n} = \frac{1}{r^n} \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)$$

Bedenkt man, dass:

$$\cos n\varphi = \cos(-n\varphi)$$

$$-\sin n\varphi = +\sin(-n\varphi)$$

ist (nach Erkl. 141), so kann man auch schreiben:

$$(a + bi)^{-n} = \frac{1}{r^n} \cdot [\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)]$$

Aus Vorstehendem folgt der Satz:

„Eine komplexe Zahl wird mit einem ganzen und reellen Exponenten potenziert, indem man ihren Modulus potenziert und die Amplitude mit dem Potenzexponenten multipliziert.“ (Vergl. Erkl. 157.)

Erkl. 157. Der Moivresche Satz hat nicht nur für positive, sondern auch, wie aus der Antwort auf Frage 76, b) hervorgeht, für negative, ganze und reelle Potenzexponenten Gültigkeit (siehe auch Erkl. 159).

Frage 77. Welche Beziehungen finden zwischen den gleich hohen Potenzen zweier konjugierten komplexen Zahlen statt?

Antwort. Ist:

$$a + bi = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

so ist:

$$a - bi = r \cdot (\cos\varphi - i \sin\varphi)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

ferner:

$$(a + bi)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n \cdot \cos n\varphi + i r^n \cdot \sin n\varphi$$

und

$$(a - bi)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) = r^n \cdot \cos n\varphi - i r^n \cdot \sin n\varphi$$

Setzt man für:

$$r^n \cdot \cos n\varphi = A$$

und für:

$$r^n \cdot \sin n\varphi = B$$

so erhält man:

$$(a+bi)^n = A+Bi$$

und

$$(a-bi)^n = A-Bi$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Konjugierte komplexe Zahlen, mit derselben reellen Ganzzahl potenziert, geben konjugierte Werte.“

Frage 78. Wie lässt sich die Potenz einer rein imaginären Zahl trigonometrisch darstellen?

Antwort. Nach Antwort auf Frage 76 ist:

$$(a+bi)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Wird $a = o$, so ist:

$$r = b \text{ und } \sphericalangle \varphi = 90^0$$

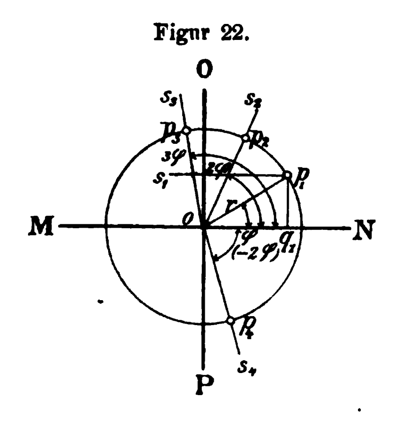
(nach Antwort auf Frage 59)

Demnach erhält man für:

$$(bi)^n = b^n \cdot (\cos n \cdot 90^0 + i \sin n \cdot 90^0)$$

Frage 79. Wie findet man in der Zahlenebene durch Zeichnung den Punkt, welcher die Potenz einer komplexen Zahl $a+bi$ darstellt, wenn der Exponent eine reelle Ganzzahl ist?

Figur 22.



Erkl. 158. Aus nebenstehender Antwort geht hervor, dass die Potenzierung einer komplexen Zahl gleichbedeutend ist mit der Multiplikation ihrer Richtung um den Nullpunkt.

Antwort. (Figur 22.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +a$ und $os_1 = +bi$ auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt stellt dann die Grundzahl der gegebenen Potenz dar. Hierauf verbinde man p_1 mit o und schlage mit $op_1 = r$ um o einen Kreisbogen. Alsdann trage man den zum Winkel $p_1 o q_1 = \varphi$ gehörenden Bogen pp_1 von p aus so oft, als der Exponent Einheiten besitzt, und, falls der Exponent positiv ist, nach der Richtung ab, nach welcher die Neigungswinkel zunehmen; falls er jedoch negativ ist, nach entgegengesetzter Richtung ab.

Dann liegt der Punkt, welcher $(a+bi)^2$ darstellt, auf der Geraden os_2, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen den Winkel 2φ einschliesst, und zwar in einer Entfernung $= r^2$ vom Nullpunkte. Ist $r = 1$, so ist p_2 der Punkt von $(a+bi)^2$.

Der die Potenz $(a+bi)^{-2}$ darstellende Punkt liegt auf der Geraden os_4, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel (-2φ) einschliesst, und ist vom Nullpunkte um

$\frac{1}{r^2}$ Einheiten entfernt. Ist $r = 1$, so ist p_4 der Punkt dieser Potenz.

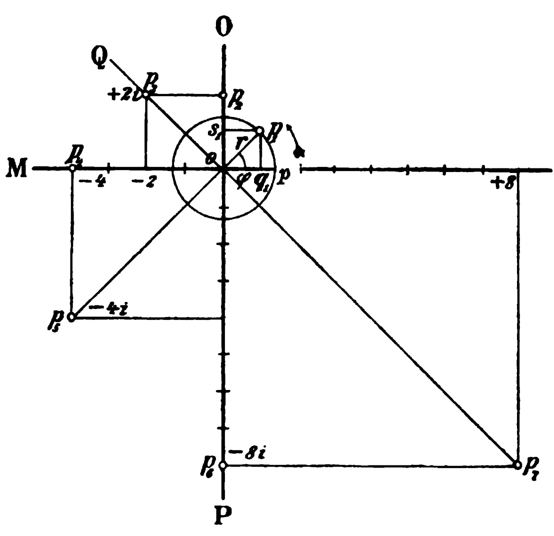
Der Punkt, welcher $(a+bi)^3$ darstellt, befindet sich auf der Geraden os_3 und ist vom Nullpunkte um r^3 Einheiten entfernt. Der Winkel $s_3 op$ ist 3φ. Ist $r = 1$, so stellt Punkt p_3 $(a+bi)^3$ dar.

Und so fort.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 59. Es sind die ersten 7 Potenzen von $(1+i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist positiv.

Figur 23.



Auflösung. (Figur 23.) Die in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +1$ und $os_1 = +i$ auf MN bezw. OP errichteten Normalen schneiden sich in p_1, welcher Punkt demnach die Grundzahl der Potenz darstellt. — Man verbinde p_1 mit o und schlage mit $op_1 = r$ um o einen vollen Kreis, auf welchem man die Länge des Bogens vom Winkel $p_1 op = \varphi$ von p aus 7 mal (oder von p_1 aus 6 mal) nach der Richtung aufzutragen hat, nach welcher die Neigungswinkel wachsen, weil der Potenzexponent positiv ist. Da $\varphi = 45^0$, wie nachfolgende Rechnung ergibt, so fallen die Punkte p_2, p_4 und p_6 auf die Achsen des Koordinatensystems, die übrigen auf die Achsen eines zweiten Koordinatensystems, welches zum ersten unter einem Winkel von 45^0 geneigt ist. Es liegt also der Punkt von $(1+i)^2$ auf oO und in einer Entfernung $= r^2$ von o, der Punkt von $(1+i)^3$ auf oQ in einer Entfernung $= r^3$ vom Nullpunkte, der Punkt von $(1+i)^4$ auf oM in einer Entfernung $= r^4$ von o, u. s. w.

Trigonometrisch erhält man, da:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1,414$$

und

$$\varphi = 45^0$$

weil $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+1}{+1} = +1$ ist, für:

$(1+i)^1 = 1,414 \cdot (\cos 45^0 + i \sin 45^0)$, dargestellt durch p_1;

$(1+i)^2 = 1,414^2 \cdot (\cos 2 \cdot 45^0 + i \sin 2 \cdot 45^0)$ (nach Antwort auf Frage 76, a)

$= 2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$, dargestellt durch p_2;

$(1+i)^3 = 1,414^3 \cdot (\cos 3 \cdot 45^0 + i \sin 3 \cdot 45^0)$

$= 2,828 \cdot (\cos 135^0 + i \sin 135^0)$, dargestellt durch p_3;

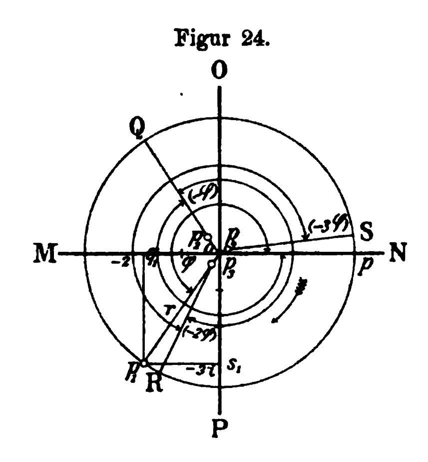
$(1+i)^4 = 1,414^4 \cdot (\cos 4 \cdot 45^0 + i \sin 4 \cdot 45^0)$

$= 4 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$, dargestellt durch p_4;

$$(1+i)^5 = 1{,}414^5\cdot(\cos 5\cdot 45^0 + i\sin 5\cdot 45^0)$$
$$= 5{,}656\cdot(\cos 225^0 + i\sin 225^0),\text{ dargestellt durch } p_5;$$
$$(1+i)^6 = 1{,}414^6\cdot(\cos 6\cdot 45^0 + i\sin 6\cdot 45^0)$$
$$= 8\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0),\text{ dargestellt durch } p_6;$$
$$(1+i)^7 = 1{,}414^7\cdot(\cos 7\cdot 45^0 + i\sin 7\cdot 45^0)$$
$$= 11{,}312\cdot(\cos 315^0 + i\sin 315^0),\text{ dargestellt durch } p_7.$$

Aufgabe 60. Es sind die ersten 3 Potenzen von $(-2-3i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist negativ.

Figur 24.



Auflösung. (Figur 24.) In den Endpunkten $oq_1 = -2$ und $os_1 = -3i$ errichte man auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann $(-2-3i)$ oder $(-2-3i)^{+1}$ dar. Man verbinde p_1 mit o und schlage mit $op_1 = r$ um o einen vollen Kreis. Auf diesem trage man die Länge des Bogens vom Winkel $pop_1 = \varphi$ von p aus nach der Richtung, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen (weil der Exponent negativ ist), dreimal ab. Dann ist der Winkel:

$$poQ = -\varphi$$
$$poR = poQ + QoR = -2\varphi$$
und
$$poS = poQ + QoR + RoS = -3\varphi$$

Mithin liegt der Punkt von $(-2-3i)^{-1}$ auf der Geraden oQ und zwar in einer Entfernung $= \frac{1}{r}$ vom Nullpunkte, der Punkt von $(-2-3i)^{-2}$ auf der Geraden oR in einer Entfernung von $\frac{1}{r^2}$ von o und der Punkt von $(-2-3i)^{-3}$ auf oS in einer Entfernung von $\frac{1}{r^3}$ vom Nullpunkte.

Trigonometrisch erhält man, da:

$$r = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$$
und
$$\varphi = 236^0\,18'\,37'' \quad \text{(nach Erkl. 159)}$$
ist, für:

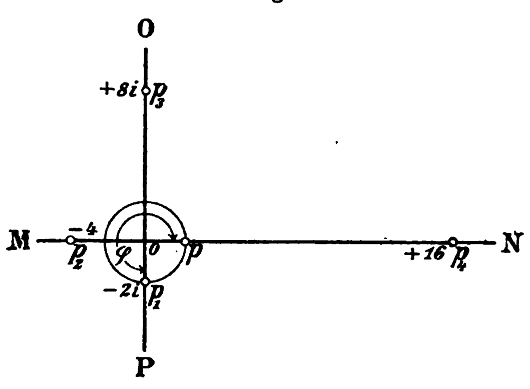
$$(-2-3)^{-1} = \frac{1}{3{,}606}\cdot(\cos 236^0\,18'\,37'' - i\sin 236^0\,18'\,37'') \quad \text{(nach Antwort auf Frage 76, b)}$$
oder:
$$= 0{,}277\cdot(\cos 123^0\,41'\,23'' + i\sin 123^0\,41'\,23'') \quad \text{(nach Erkl. 139), dargestellt durch } p_2;$$

$$(-2-3)^{-2} = \frac{1}{3{,}606^2}\cdot(\cos 2\cdot 236^0\,18'\,37'' - i\sin 2\cdot 236^0\,18'\,37'')$$
$$= \frac{1}{13}\cdot(\cos 472^0\,37'\,14'' - i\sin 472^0\,37'\,14'')$$
oder:
$$= \frac{1}{13}\cdot(\cos 112^0\,37'\,14'' - i\sin 112^0\,37'\,14'') \quad \text{(nach Erkl. 131)}$$
oder:
$$= \frac{1}{13}\cdot(\cos 247^0\,22'\,46'' + i\sin 247^0\,22'\,46''),\text{ dargestellt durch } p_3;$$

$$(-2-3)^{-3} = \frac{1}{3{,}606^3}\cdot(\cos 3\cdot 236^0\,18'\,37'' - i\sin 3\cdot 236^0\,18'\,37'')$$
$$= 0{,}021\cdot(\cos 708^0\,55'\,51'' - i\sin 708^0\,55'\,51'')$$
oder:
$$= 0{,}021\cdot(\cos 348^0\,55'\,51'' - i\sin 348^0\,55'\,51'')$$
oder:
$$= 0{,}021\cdot(\cos 11^0\,4'\,9'' + i\sin 11^0\,4'\,9''),\text{ dargestellt durch } p_4.$$

Aufgabe 61. Es sind die ersten 4 Potenzen von $(-2i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist positiv.

Figur 25.



Auflösung. (Figur 25.) Der Punkt, welcher die Grundzahl der gegebenen Potenz darstellt, liegt auf der Achse der negativen imaginären Zahlen um 2 Einheiten vom Nullpunkte entfernt und ist p_1. Die Amplitude von $-2i$ ist $\varphi = 270^0$. Da der Exponent positiv ist, so ist von p aus auf dem mit dem Radius $op_1 = r$ beschriebenen Kreis nach der Richtung, nach welcher die Neigungswinkel zunehmen, der Bogen des Winkels von 270^0 4 mal (oder von p_1 aus 3 mal) abzutragen. Es liegt dann der Punkt des Quadrats von $(-2i)$ auf der Achse der negativen reellen Zahlen und zwar um r^2 Einheiten vom Nullpunkte entfernt, der Punkt von $(-2i)^3$ auf der Achse der positiven imaginären Zahlen und in einer Entfernung $= r^3$ von o, der Punkt von $(-2i)^4$ auf der Achse der positiven reellen Zahlen in einer Entfernung $= r^4$ vom Nullpunkte.

Trigonometrisch erhält man, da:

$$r = \sqrt{2^2} = 2$$

und

$$\varphi = 270^0$$

ist, für:

$(-2i)^1 = 2\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$, dargestellt durch p_1;

$(-2i)^2 = 2^2\cdot(\cos 2\cdot 270^0 + i\sin 2\cdot 270^0)$
$= 4\cdot(\cos 540^0 + i\sin 540^0)$
oder: $= 4\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)$ (nach Erkl. 131), dargestellt durch p_2;

$(-2i)^3 = 2^3\cdot(\cos 3\cdot 270^0 + i\sin 3\cdot 270^0)$
$= 8\cdot(\cos 810^0 + i\sin 810^0)$
oder: $= 8\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$, dargestellt durch p_3;

$(-2i)^4 = 2^4\cdot(\cos 4\cdot 270^0 + i\sin 4\cdot 270^0)$
$= 16\cdot(\cos 1080^0 + i\sin 1080^0)$
oder: $= 16\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)$, dargestellt durch p_4.

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 62. Es sind die ersten 5 Potenzen von $(2-i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist negativ.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 59.

Aufgabe 63. Es sind die ersten 4 Potenzen von $(+1{,}5i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist negativ.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt nach der Antwort auf Frage 78 und mit Berücksichtigung der Aufgabe 60.

5) Ueber das trigonometrische und graphische Radizieren.

a) Ueber das trigonometrische Radizieren.

Frage 80. Wie lässt sich die $n$te Wurzel aus einer komplexen Zahl:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

trigonometrisch darstellen?

Antwort. Nach dem Moivreschen Satze (siehe Antwort auf Frage 76 und Erkl. 156) ist:

$$(a+bi)^m = r^m \cdot (\cos m\varphi + i\sin m\varphi)$$

Setzt man in diese Gleichung $\frac{1}{n}$ statt m ein, so erhält man:

$$(a+bi)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\frac{1}{n}\cdot\varphi + i\sin\frac{1}{n}\cdot\varphi\right)$$

Nach Erkl. 43a ist aber:

$$(a+bi)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(a+bi)^1} = \sqrt[n]{a+bi}$$

und ebenso:

$$r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r^1} = \sqrt[n]{r}$$

Mithin gibt:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

(siehe Frage 82)

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Eine komplexe Zahl wird radiziert, indem man ihren Modulus (Radiusvektor) radiziert und die Amplitude durch den Wurzelexponenten dividiert.“ (Vgl. Erkl. 160).

Erkl. 159. Wie aus nebenstehender Antwort hervorgeht, ist der Moivresche Satz nicht nur für ganze, sondern auch für gebrochene Exponenten gültig.

Erkl. 160. Die Radizierung einer komplexen Zahl ist gleichbedeutend mit der Division ihrer Richtung um den Nullpunkt.

Frage 81. Wie lässt sich:

$$(\sqrt[n]{a+bi})^m \text{ oder } \sqrt[n]{(a+bi)^m}$$

trigonometrisch berechnen?

Antwort. Nach Erkl. 43a ist:

$$(\sqrt[n]{a+bi})^m \text{ oder } \sqrt[n]{(a+bi)^m} = (a+bi)^{\frac{m}{n}}$$

Nach dem Moivreschen Satze gibt aber:

$$(a+bi)^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\cos\frac{m}{n}\cdot\varphi + i\sin\frac{m}{n}\cdot\varphi\right)$$

oder:

$$= \sqrt[n]{r^m} \cdot \left(\cos\frac{m\varphi}{n} + i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)$$

Erkl. 161. Da $\frac{m}{n}$ eine irrationale Zahl (vergl. Erkl. 13) sein kann, so gilt die Regel für die Potenz einer komplexen Zahl also auch für irrationale Exponenten.

Frage 82. Wie lassen sich sämtliche Werte des Wurzelausdruckes:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

bestimmen?

Antwort. Man kann für:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

auch schreiben:

$$\sqrt[n]{(\pm 1)\cdot(a+bi)}$$

oder auch (nach Erkl. 9):

$$\sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{(a+bi)}$$

und erhält dann nach der Antwort auf Frage 80:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)} = \sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

Da der Modulus eine absolute Zahl ist (vergl. Erkl. 12 und Antwort auf Frage 55), so erhält man für $\sqrt[n]{r}$ nur einen einzigen Wert; ebenso gibt der Richtungskoëffizient:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

nur einen Wert. Man wird daher die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

erhalten, wenn man alle Werte von:

$$\sqrt[n]{\pm 1}$$

ermittelt. Setzt man für:

$$\sqrt[n]{\pm 1} = \varrho\cdot(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

dann ist:

$$\varrho^n\cdot(\cos n\alpha+i\sin n\alpha) = (\sqrt[n]{\pm 1})^n = \pm 1$$

oder:

$$\varrho^n\cdot\cos n\alpha+i\varrho^n\cdot\sin n\alpha = \pm 1$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist reell, folglich muss es auch die linke Seite sein, und es muss also das imaginäre Glied $i\cdot\varrho^n\cdot\sin n\alpha$ verschwinden. Da i nicht gleich Null ist, da ferner auch ϱ^n oder ϱ nicht gleich Null sein kann, weil man sonst für:

$$\varrho^n\cdot(\cos n\alpha+i\sin n\alpha) = 0$$

erhalten würde, während dieses Produkt $+1$ oder -1 sein sollte, so muss $\sin n\alpha$ gleich Null sein. Es muss also (nach Erkl. 162):

$$n\alpha = 0^0,\ 180^0,\ 360^0,\ 540^0,\ 720^0\cdots$$

oder:

$$= 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi\cdots$$

sein.

Für die Winkel 0^0, 360^0, $720^0\cdots$, oder 0, 2π, $4\pi\cdots$, oder allgemein $n\alpha = 2k\pi$, wenn k eine beliebige, positive, ganze und reelle Zahl (ein-

Erkl. 162. Der Sinus ist Null bei den Winkeln von 0^0, 180^0, 360^0, 540^0, 720^0 u. s. w. oder, wenn man die Winkel statt durch Grade durch die Längen der mit dem Halbmesser $= 1$ zwischen ihren Schenkeln beschriebenen Kreisbögen ausdrückt (vergl. Erkl. 98), bei 0, π, 2π, 3π, 4π, 5π u. s. w.

Erkl. 163. Ist n eine gerade Zahl, so besitzt $\sqrt[n]{+1}$ die Werte $+1$ und -1, weil $(\pm 1)^n$ dann $+1$ ist. Ist n eine ungerade Zahl, so gehört zu $\sqrt[n]{+1}$ der Wert $+1$; lässt sich n durch 4 teilen ohne Rest, so hat $\sqrt[n]{+1}$ die Werte $+i$ und $-i$, weil $(\pm i)^n$ in diesem Falle gleich $+1$ ist (s. Antwort auf Frage 5).

Da:

$$(\sqrt[n]{-1})^{2n} = (\sqrt[n]{(-1)^n})^2 = (-1)^2 \text{ (n. Erkl. 48)} = +1$$

ist, so sind die Werte von $\sqrt[n]{-1}$ unter den Werten von $\sqrt[2n]{+1}$. Da ferner:

$$(\sqrt[n]{\pm i})^{4n} = (\sqrt[n]{(\pm i)^n})^4 = (\pm i)^4 = +1$$

ist, so befinden sich die Werte von $\sqrt[n]{\pm i}$ unter den Werten von $\sqrt[4n]{+1}$.

Erkl. 164. Nach Erkl. 123 ist:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

und

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$$

Nun gibt:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$= \cos\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n}$$
$$+ i\cos\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n} + i^2\cdot\sin\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$$

oder:

$$= \cos\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n} - \sin\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$$
$$+ i\cdot\left(\sin\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n} + \cos\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

d. i.:

$$= \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

oder:

$$= \cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

In gleicher Weise findet man für:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right] =$$
$$\cos\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right] + i\sin\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right]$$

Erkl. 165. Für $k = x$ und $k = x + n$, worin x irgend welche positive reelle Ganzzahl bedeutet, erhält man statt:

$$\cos\frac{2k\pi}{n} \text{ einmal} = \cos\frac{2x\pi}{n}$$

sodann:

$$= \cos\frac{2(x+n)\pi}{n} = \cos\left(\frac{2x\pi}{n} + 2\pi\right)$$
$$= \cos\frac{2x\pi}{n};$$

statt:

$$\sin\frac{2k\pi}{n} \text{ einmal} = \sin\frac{2x\pi}{n}$$

schliesslich 0) bedeutet, ist der Cosinus $= +1$, jedoch $= -1$ bei den Winkeln 180^0, 540^0, $900^0 \cdots$, oder π, 3π, $5\pi\cdots$, oder allgemein $n\alpha = (2k+1)\pi$.

Folglich erhält man für:

$$+1 = \varrho^n\cdot(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)$$
$$-1 = \varrho^n\cdot[\cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi]$$

(siehe Erkl. 163)

oder:

$$+1 = \varrho^n(+1+0) = +\varrho^n$$

und

$$-1 = \varrho^n(-1+0) = -\varrho^n$$

Hieraus ergibt sich, dass ϱ^n gleich der absoluten Einheit ist.

Demnach gibt:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

ferner:

$$\sqrt[n]{+(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

und

$$\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

oder (nach Erkl. 164):

$$\sqrt[n]{+(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

und

$$\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left\{\cos\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right] + i\sin\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right]\right\}$$

Da k, wie bemerkt, jede beliebige, positive und reelle Ganzzahl sein kann, so scheint es, dass man für:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

unendlich viele verschiedene Werte erhalten müsste. Da jedoch (nach Erklärung 131):

$$\cos(2\pi+\alpha) = \cos\alpha$$

und

$$\sin(2\pi+\alpha) = \sin\alpha$$

und sodann:

$$= \sin\frac{2\cdot(x+n)\pi}{n} = \sin\frac{2x\pi}{n};$$

statt:

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \text{ einmal } = \cos\frac{(2x+1)\pi}{n}$$

und sodann:

$$= \cos\left[\frac{2\cdot(x+n)+1}{n}\right]\pi = \cos\left(\frac{2x+2n+1}{n}\right)\pi$$

$$= \cos\left[\frac{(2x+1)}{n}\pi + 2\pi\right] = \cos\frac{(2x+1)\pi}{n};$$

statt:

$$\sin\frac{(2k+1)\pi}{n} \text{ einmal } = \sin\frac{(2x+1)\pi}{n}$$

und sodann:

$$= \sin\left[\frac{2\cdot(x+n)+1}{n}\right]\pi = \sin\frac{(2x+1)\pi}{n}$$

also stets das nämliche.

ist, so erhält man aus den beiden Klammerausdrücken:

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

für zwei Zahlenwerte von k, welche die Differenz n haben, das gleiche (siehe Erkl. 165). Hiernach können sich für:

$$\sqrt[n]{\pm 1}$$

nur n verschiedene Werte ergeben, die man erhält, wenn man für k n aufeinanderfolgende Zahlen, am einfachsten die Zahlen: $0, 1, 2, 3 \cdots (n-1)$ einsetzt.

Frage 83. Welche Werte erhält man für:

$$\sqrt[n]{\pm a}$$

wenn a eine beliebige reelle Zahl bedeutet?

Erkl. 166. Ist n eine gerade Zahl, so besitzt $\sqrt[n]{+a}$ zwei reelle Werte, nämlich $+1$ für $k = 0$ und -1 für $k = \frac{n}{2}$. Ist n eine ungerade Zahl, so hat $\sqrt[n]{+a}$ nur einen reellen Wert, nämlich $+1$ für $k = 0$. (Siehe die Aufgaben.)

Erkl. 167. Ist n eine gerade Zahl, so besitzt $\sqrt[n]{-a}$ nur komplexe oder rein imaginäre Werte. Ist n eine ungerade Zahl, so hat $\sqrt[n]{-a}$ einen reellen Wert, nämlich -1 für $k = \frac{n-1}{2}$. (Siehe die Aufgaben.)

Antwort. Es lässt sich zunächst:

$$\sqrt[n]{\pm a}$$

zerlegen in die beiden Faktoren:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\pm 1}$$

Da nun (nach voriger Antwort):

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

ist, so gibt:

$$\sqrt[n]{+a} = \sqrt[n]{a} \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

und

$$\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a} \cdot \left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

Hierin sind für k nacheinander die Zahlen $0, 1, 2, 3 \cdots (n-1)$ einzusetzen (vergl. Erkl. 166 und 167).

Frage 84. Welche Werte erhält man für die $n$te Wurzel aus einer positiven oder negativen, rein imaginären Zahl?

Antwort. Ist der Radikandus eine rein imaginäre Zahl, z. B. ai, so ist die Amplitude:

$$\varphi = 90^0 = \frac{\pi}{2}$$

(nach Antwort auf Frage 59 und Erkl. 98)

Erkl. 168. Man erhält für:

$$\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}=\frac{\pi}{2n}+\frac{4k\pi}{2n}$$
$$=\frac{\pi+4k\pi}{2n}=\frac{(4k+1)\pi}{2n}$$
(nach Erkl. 26)

ferner für:

$$\frac{\pi}{2n}+\frac{(2k+1)\pi}{n}=\frac{\pi}{2n}+\frac{4k\pi+2\pi}{2n}$$

oder:

$$=\frac{4k\pi+3\pi}{2n}=\frac{(4k+3)\pi}{2n}$$

Erkl. 169. Sämtliche Werte von $\sqrt[n]{+ai}$ sind entweder rein imaginär oder komplex. (Siehe die Aufgaben.)

Mithin erhält man für:

$$\sqrt[n]{\pm ai}=\sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{90^0}{n}+i\sin\frac{90^0}{n}\right)$$

oder:

$$=\sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)$$

Da nun:

$$\sqrt[n]{+1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$
(nach Antwort auf Frage 82)

ist, so erhält man für:

$$\sqrt[n]{+ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

oder (nach Erkl. 164):

$$\sqrt[n]{+ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

oder:

$$=\sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+1)\pi}{2n}+i\sin\frac{(4k+1)\pi}{2n}\right]$$
(siehe Erkl. 168).

Da ferner:

$$\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$
(nach Antwort auf Frage 82)

ist, so ergibt:

$$\sqrt[n]{-ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

oder (nach Erkl. 164):

$$\sqrt[n]{-ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+3)\pi}{2n}+i\sin\frac{(4k+3)\pi}{2n}\right]$$ (siehe Erkl. 169).

Frage 85. Welche Beziehung findet zwischen den Wurzeln desselben Grades zweier konjugierten komplexen Zahlen statt?

Antwort. Setzt man für:

$$a+bi=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

so ist:

$$a-bi=r\cdot(\cos\varphi-i\sin\varphi)$$
(nach Antwort auf Frage 59)

ferner:

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$
(nach Antwort auf Frage 80)

und

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n}-i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

Setzt man nun für:

$$\sqrt[n]{r}\cdot\cos\frac{\varphi}{n}=A$$

und für:

$$\sqrt[n]{r}\cdot\sin\frac{\varphi}{n}=B$$

so erhält man:

$$\sqrt[n]{a+bi} = A + Bi$$

und

$$\sqrt[n]{a-bi} = A - Bi$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Zieht man aus zwei konjugierten komplexen Zahlen dieselbe Wurzel, so erhält man konjugierte Werte.“

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 64. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[4]{16+30i}$$

zu berechnen.

Erkl. 170. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+30}{+16} = +1{,}875$ ist, so liegt φ im ersten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi = 1{,}8750$$
$$\operatorname{tg} 61^0\,50' = 1{,}8676$$
$$\text{Rest: } 74$$

Differenz für 1 Minute = 13,1. Mithin kommen zum Winkel $61^0\,50'$ noch:

$$\frac{74}{13{,}1} = 5\frac{85'}{131} = 5'\,39''$$

Demnach ist $\varphi = 61^0\,55'\,39''$.

Erkl. 171. Man erhält für:

$$\cos 15^0\,20' = 0{,}96440$$

Differenz für:

$$8\frac{11'}{12} = 8\frac{11}{12}\cdot 7{,}7 = 69$$

Letztere ist beim Cosinus zu subtrahieren. Folglich gibt:

$$\cos 15^0\,28'\,55'' = 0{,}96440$$
$$-\quad 69$$
$$= 0{,}96371$$

Erkl. 172. Es gibt:

$$\sin 15^0\,20' = 0{,}26443$$

Differenz für:

$$8\frac{11'}{12} = 8\frac{11}{12}\cdot 28{,}1 = 251$$

Letztere ist beim Sinus zu addieren. Man erhält also:

$$\sin 15^0\,28'\,55'' = 0{,}26443$$
$$+\quad 251$$
$$= 0{,}26694$$

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 82 ist:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

Im vorliegenden Beispiel ist:

$$a = 16; \qquad bi = 30i$$
$$r = \sqrt{16^2+30^2} = \sqrt{1156} = 34$$
$$n = 4; \qquad k = 0,\ 1,\ 2 \text{ und } 3$$
$$\sqrt[n]{r} = \sqrt[4]{34} = \sqrt{5{,}83095} = 2{,}415$$
$$\varphi = 61^0\,55'\,39'' \text{ (nach Erkl. 170)}$$

Folglich erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39''+0^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39''+0^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot(\cos 15^0\,28'\,55'' + i\sin 15^0\,28'\,55'')$$

Nun ist:

$$\cos 15^0\,28'\,55'' = 0{,}96371 \text{ (nach Erkl. 171)}$$

und

$$\sin 15^0\,28'\,55'' = 0{,}26694 \text{ (nach Erkl. 172)}$$

folglich gibt:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(0{,}96371 + 0{,}26694\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}327 + 0{,}645\,i \,\ldots\ldots\ldots\, x_1$$

2) $k = 1$.

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0 55' 39'' + 2\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39''+2\cdot180^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot\left(\cos\frac{421^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{421^0\,55'\,39''}{4}\right)$$
$$= 2{,}415\cdot(\cos 105^0 28' 55'' + i\sin 105^0 28' 55'')$$

Erkl. 173. Da:

$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -\cos(180^0 - 105^0\,28'\,55'')$$

oder:

$$= -\cos 73^0\,31'\,5''$$

ist, so ergibt sich für:

$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -0{,}26724 \quad (= -\cos 73^0\,30'')$$

$$-\quad 30 \left(= \text{Diff. für } 1\tfrac{1'}{12}\right)$$

$$= -0{,}26694$$

Erkl. 174. Es ist:

$$\sin 105^0\,28'\,55'' = \sin(180^0 - 105^0\,28'\,55'')$$

$$= \sin 73^0\,31'\,5''$$

Mithin gibt:

$$\sin 105^0\,28'\,55'' = 0{,}96363 \quad (= \sin 73^0\,30')$$

$$+\quad 8 \left(= \text{Differ. für } 1\tfrac{1'}{12}\right)$$

$$= 0{,}96371$$

Erkl. 175. Es ist:

$$\cos 195^0\,28'\,55'' = -\cos(195^0\,28'\,55'' - 180^0)$$

$$= -\cos 15^0\,28'\,55''$$

$$= -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 171)}$$

Erkl. 176. Es ist:

$$\sin 195^0\,28'\,55'' = -\sin(195^0\,28'\,55'' - 180^0)$$

$$= -\sin 15^0\,28'\,55''$$

$$= -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 172)}$$

Erkl. 177. Man erhält für:

$$\cos 285^0\,28'\,55'' = +\cos(360^0 - 285^0\,28'\,55'')$$

$$= \cos 74^0\,31'\,5''$$

$$= 0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 173)}$$

Erkl. 178. Man erhält für:

$$\sin 285^0\,28'\,55'' = -\sin(360^0 - 285^0\,28'\,55'')$$

$$= -\sin 74^0\,31'\,5''$$

$$= -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 174)}$$

Erkl. 179. Da:

$$\sqrt[4]{16+30i} = \sqrt{\sqrt{16+30i}}$$

ist (nach Erkl. 8), so lassen sich die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[4]{16+30i}$$

mit Hilfe der Antwort auf Frage 51 berechnen. Man erhält:

$$\sqrt[2]{16+30i} = \pm\left(\sqrt[2]{\frac{16+\sqrt{256+900}}{2}} + i\cdot\sqrt[2]{\frac{-16+\sqrt{256+900}}{2}}\right) = \pm(5+3i)$$

ferner:

$$\sqrt[2]{+(5+3i)} = \pm\left(\sqrt[2]{\frac{5+\sqrt{25+9}}{2}} + i\cdot\sqrt[2]{\frac{-5+\sqrt{25+9}}{2}}\right) = \pm(2{,}327+0{,}645i)$$

Nun gibt:

$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 173)}$$

und

$$\sin 105^0\,28'\,55'' = +0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 174)}$$

folglich ist:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(-0{,}26694 + 0{,}96371\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[4]{16+30i} = -0{,}645 + 2{,}327\,i \;\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2.$

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39''+4\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39''+4\cdot 180^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot\left(\cos\frac{781^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{781^0\,55'\,39''}{4}\right)$$

$$= 2{,}415\cdot(\cos 195^0\,28'\,55'' + i\sin 195^0\,28'\,54'')$$

Nun erhält man für:

$$\cos 195^0\,28'\,55'' = -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 175)}$$

und für:

$$\sin 195^0\,28'\,55'' = -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 176)}$$

folglich gibt:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(-0{,}96371 - 0{,}26694\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[4]{16+30i} = -2{,}327 - 0{,}645\,i \;\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3.$

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39''+6\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39''+6\cdot 180^0}{4}\right)\right] = 2{,}414\cdot\left(\cos\frac{1141^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{1141^0\,55'\,39''}{4}\right)$$

$$= 2{,}415\cdot(\cos 285^0\,28'\,55'' + i\sin 285^0\,28'\,55'')$$

Nun ist:

$$\cos 285^0\,28'\,55'' = 0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 177)}$$

und

$$\sin 285^0\,28'\,55'' = -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 178)}$$

Mithin gibt:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(0{,}26694 - 0{,}96371\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 0{,}645 - 2{,}327\,i \;\ldots\ldots\; x_4$$

(vergl. Erkl. 179 und 180)

also:

$$x_1 = +2{,}327 + 0{,}645\,i$$
$$x_2 = -2{,}327 - 0{,}645\,i$$

endlich:

$$\sqrt[2]{-(5+3i)} = \sqrt[2]{-5-3i}$$
$$= \pm\left(\sqrt[2]{\frac{-5+\sqrt{25+9}}{2}} - i\cdot\sqrt[2]{\frac{5+\sqrt{25+9}}{2}}\right)$$
$$= \pm(0{,}645 - 2{,}327\,i)$$

also:

$$x_3 = +0{,}645 - 2{,}327\,i$$
$$x_4 = -0{,}645 + 2{,}327\,i$$

Demnach erhält man dieselben Werte wie durch nebenstehende Rechnung.

Erkl. 180. Nach einem Satze der Algebra muss die Summe der Wurzeln gleich Null sein. Man erhält für das vorliegende Beispiel:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$$
$$(+2{,}327 + 0{,}645\,i) + (-0{,}645 + 2{,}327\,i) +$$
$$(-2{,}327 - 0{,}645\,i) + (0{,}645 - 2{,}327\,i)$$

oder:

$$\begin{array}{r} +2{,}327 + 0{,}645\,i \\ -0{,}645 + 2{,}327\,i \\ -2{,}327 - 0{,}645\,i \\ +0{,}645 - 2{,}327\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 65. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

zu berechnen.

Erkl. 181. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+4}{+3} = +1{,}3333\cdots$ ist, so liegt φ im ersten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{array}{r} \operatorname{tg}\varphi = 1{,}3333 \\ \operatorname{tg} 53^0\, 0' = 1{,}3270 \\ \hline \text{Rest: } 63 \end{array}$$

Differenz für 1 Minute $= 8{,}1$. Mithin kommen zum Winkel 53^0 noch:

$$\frac{63}{8{,}1} = 7\frac{7'}{9} = 7'\,47''$$

Es ist also $\varphi = 53^0\, 7'\, 47''$.

Erkl. 182. Es gibt:

$$\cos 77^0\, 40' = 0{,}21360$$

Differenz für $2{,}6' = 2{,}6 \cdot 28{,}4 = 74$. Letztere ist beim Cosinus zu subtrahieren. Mithin ist:

$$\begin{array}{r} \cos 77^0\, 42'\, 36'' = 0{,}21360 \\ -\quad 74 \\ \hline = 0{,}21286 \end{array}$$

Auflösung. Da sich:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

zerlegen lässt in:

$$\sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{3+4i}$$

so erfolgt die Berechnung von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

mit Hilfe der in der Antwort auf Frage 82 abgeleiteten Formel:

$$\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left\{\cos\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right] + i\sin\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right]\right\}$$ (siehe auch Erkl. 188)

Es ist:

$a = 3$; $b = 4$; $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$n = 3$; $k = 0$, 1 und 2

$\sqrt[n]{r} = \sqrt[3]{5} = 1{,}71$ (denn $1{,}71^3 = 5$)

$\varphi = 53^0\, 7'\, 47''$ (nach Erkl. 181)

Erkl. 183. Man erhält für:

$$\sin 77^0\,40' = 0{,}97692$$

Differenz für $2{,}6' = 2{,}6\cdot 6{,}2 = 16$. Letztere ist beim Sinus zu addieren. Demnach gibt:

$$\sin 77^0\,42'\,36'' = 0{,}97692 \quad + 16 \quad = 0{,}97708$$

Erkl. 184. Da:

$$\cos 197^0\,42'\,36'' = -\cos(197^0\,42'\,36'' - 180^0) = -\cos 17^0\,42'\,36''$$

ist, so erhält man für:

$$\cos 197^0\,42'\,36'' = -0{,}95284 \;(= -\cos 17^0\,40') \quad - 23 \;(= \text{Diff. für } 2{,}6') \quad = -0{,}95261$$

Erkl. 185. Da:

$$\sin 197^0\,42'\,36'' = -\sin(197^0\,42'\,36'' - 180^0) = -\sin 17^0\,42'\,36''$$

ist, so ergibt:

$$\sin 197^0\,42'\,36'' = -0{,}30348 \;(= -\sin 17^0\,40') \quad + 72 \;(= \text{Diff. für } 2{,}6') \quad = -0{,}30420$$

Erkl. 186. Da:

$$\cos 317^0\,42'\,36'' = +\cos(360^0 - 317^0\,42'\,36'') = \cos 42^0\,17'\,24''$$

ist, so erhält man für:

$$\cos 317^0\,42'\,36'' = 0{,}74120 \;(= \cos 42^0\,10') \quad - 145 \;(= \text{Diff. für } 7{,}4 \text{ Min.}) \quad = 0{,}73975$$

Erkl. 187. Da:

$$\sin 317^0\,42'\,36'' = -\sin(360^0 - 317^0\,42'\,36'') = -\sin 42^0\,17'\,24''$$

ist, so ergibt:

$$\sin 317^0\,42'\,36'' = -0{,}67129 \;(= -\sin 42^0\,10') \quad + 159 \;(= \text{Diff. f. } 7{,}4 \text{ Min.}) \quad = -0{,}67288$$

Erkl. 188. Es lassen sich auch die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

nach der anderen Formel der Antwort auf Frage 82, nämlich nach:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

berechnen. Dann erhält man für:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-4}{-3} = +1{,}333\cdots$$

also:

$$\varphi = 180^0 + 53^0\,7'\,47'' = 233^0\,7'\,47''$$

Mithin erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71\cdot\left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (0+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i\sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (0+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\}$$

$$= 1{,}71\cdot\left(\cos\frac{233^0\,7'\,47''}{3} + i\sin\frac{233^0\,7'\,47''}{3}\right)$$

$$= 1{,}71\cdot(\cos 77^0\,42'\,36'' + i\sin 77^0\,42'\,36'')$$

Nun ist:

$$\cos 77^0\,42'\,36'' = 0{,}21286 \text{ (nach Erkl. 182)}$$

und

$$\sin 77^0\,42'\,36'' = 0{,}97708 \text{ (nach Erkl. 183)}$$

folglich gibt:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71\cdot(0{,}21286 + 0{,}97708\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 0{,}364 + 1{,}671\,i \;\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1$.

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71\cdot\left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (2+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i\sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (2+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\}$$

$$= 1{,}71\cdot\left(\cos\frac{593^0\,7'\,47''}{3} + i\sin\frac{593^0\,7'\,47''}{3}\right)$$

$$= 1{,}71\cdot(\cos 197^0\,42'\,36'' + i\sin 197^0\,42'\,36'')$$

oder, da:

$$\cos 197^0\,42'\,36'' = -0{,}95261 \text{ (nach Erkl. 184)}$$

und

$$\sin 197^0\,42'\,36'' = -0{,}30420 \text{ (nach Erkl. 185)}$$

ist:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71\cdot(-0{,}95261 - 0{,}30420\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = -1{,}629 - 0{,}520\,i \;\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2$.

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71\cdot\left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (4+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i\sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (4+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\}$$

$$= 1{,}71\cdot\left(\cos\frac{953^0\,7'\,47''}{3} + i\sin\frac{953^0\,7'\,47''}{3}\right)$$

$$= 1{,}71\cdot(\cos 317^0\,42'\,36'' + i\sin 317^0\,42'\,36'')$$

und für:

$$k = 0.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{233^0\,7'\,47''}{3} + i\sin\frac{233^0\,7'\,47''}{3}\right)$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 77^0\,42'\,36'' + i\sin 77^0\,42'\,36'')$$
$$= 0{,}364 + 1{,}671\,i$$

$$k = 1.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left[\cos\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 360^0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 360^0}{3}\right)\right]$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 197^0\,42'\,36'' + i\sin 197^0\,42'\,36'')$$
$$= -1{,}629 - 0{,}520\,i$$

$$k = 2.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left[\cos\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 720^0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 720^0}{3}\right)\right]$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 317^0\,42'\,36'' + i\sin 317^0\,42'\,36'')$$
$$= 1{,}265 - 1{,}151\,i$$

Erkl. 189. Nach Erkl. 180 muss:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

sein. Man erhält nach nebenstehender Antwort oder vorstehender Erklärung:

$$\begin{array}{r} +0{,}364 + 1{,}671\,i \\ -1{,}629 - 0{,}520\,i \\ +1{,}265 - 1{,}151\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

oder, da:

$\cos 317^0\,42'\,36'' = +0{,}73975$ (nach Erkl. 186)

und

$\sin 317^0\,42'\,36'' = -0{,}67288$ (nach Erkl. 187)

ist:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot (0{,}73975 - 0{,}67288\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = +1{,}265 - 1{,}151\,i \;\ldots\;\ldots\; x_3$$

(vergl. Erkl. 188 und 189)

Aufgabe 66. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[5]{+32}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 83 erhält man für:

$$\sqrt[n]{+a} = \sqrt[n]{a} \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Im vorliegenden Beispiele ist:

$$a = 32;\quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[5]{32} = 2$$
$$n = 5;\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ und } 4$$

Folglich ergibt sich für:

1) $k = 0.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0) = 2 \cdot (1 + 0) = +2 \;\ldots\; x_1$$

2) $k = 1.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2 \cdot \left(\cos\frac{2 \cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{2 \cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2 \cdot (\cos 72^0 + i\sin 72^0)$$
$$= 2 \cdot (0{,}30902 + i \cdot 0{,}95106)$$
$$= 0{,}61804 + 1{,}90212\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2$.

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{4\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{4\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 144^0 + i\sin 144^0)$$
$$= 2\cdot(-\cos 36^0 + i\sin 36^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(-0{,}80902 + i\cdot 0{,}58779)$$
$$= -1{,}61804 + 1{,}17558\,i \;\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3$.

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{6\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{6\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 216^0 + i\sin 216^0)$$
$$= 2\cdot(-\cos 36^0 - i\sin 36^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(-0{,}80902 - 0{,}58779\,i)$$
$$= -1{,}61804 - 1{,}17558\,i \;\ldots\ldots\; x_4$$

5) $k = 4$.

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{8\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{8\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 288^0 + i\sin 288^0)$$
$$= 2\cdot(\cos 72^0 - i\sin 72^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(0{,}30902 - 0{,}95106\,i)$$
$$= 0{,}61804 - 1{,}90212\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_5$$

(vergl. Erkl. 190)

Erkl. 190. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

sein. Man erhält nach nebenstehender Antwort:

$$\begin{array}{l} +2 \\ +0{,}61804 + 1{,}90212\,i \\ -1{,}61804 + 1{,}17558\,i \\ -1{,}61804 - 1{,}17558\,i \\ +0{,}61804 - 1{,}90212\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 67. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[6]{-729}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 83 ist:

$$\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$a = 729$; $k = 0, 1, 3, 4$ und 5; $n = 6$;

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[6]{729} = 3$$

folglich erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{180^0}{6} + i\sin\frac{180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$$
$$= 3\cdot(0{,}86603 + 0{,}5\,i)$$
$$= 2{,}59809 + 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1$.

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{3\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{3\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$$
$$= 3\cdot(0+i) = 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{5\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{5\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 150^0 + i\sin 150^0)$$
$$= 3\cdot(-\cos 30^0 + i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(-0{,}86603 + 0{,}5\,i)$$
$$= -2{,}59809 + 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{7\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{7\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 210^0 + i\sin 210^0)$$
$$= 3\cdot(-\cos 30^0 - i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(-0{,}86603 - 0{,}5\,i)$$
$$= -2{,}59808 - 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_4$$

5) $k = 4.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{9\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{9\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$
$$= 3\cdot(0 - i) \text{ (nach Erkl. 101)}$$
$$= -3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_5$$

6) $k = 5.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{11\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{11\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 330^0 + i\sin 330^0)$$
$$= 3\cdot(\cos 30^0 - i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(0{,}86603 - 0{,}5\,i)$$
$$= +2{,}59809 - 1{,}5\,i) \;\ldots\ldots\ldots\; x_6$$

(vergl. Erkl. 191)

Erkl. 191. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

sein. Nach nebenstehender Rechnung erhält man:

$$\begin{array}{r} +2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ +3{,}0\,i \\ -2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ -2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ -3\,i \\ +2{,}59809 - 1{,}5\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 68. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{216\,i}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 84 ist:

$$\sqrt[n]{+ai} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(4k+1)\pi}{2n}\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$a = 216;\qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[3]{216} = 6$$
$$n = 3;\qquad k = 0,\ 1 \text{ und } 2$$

folglich erhält man für:

1) $k = 0.$

$$\sqrt[3]{216\,i} = 6\cdot\left(\cos\frac{180^0}{6} + i\sin\frac{180^0}{6}\right)$$
$$= 6\cdot(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$$
$$= 6\cdot(0{,}86603 + i\cdot 0{,}5)$$
$$= 5{,}19618 + 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1.$

$$\sqrt[3]{216\,i} = 6\cdot\left(\cos\frac{5\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{5\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 6\cdot(\cos 150^0 + i\sin 150^0)$$
$$= 6\cdot(-\cos 30^0 + i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= -5{,}19618 + 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

Erkl. 192. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

sein. Nach nebenstehender Rechnung erhält man:

$$\begin{array}{r} +5{,}19618 + 3i \\ -5{,}19618 + 3i \\ -6i \\ \hline =0 \end{array}$$

3) $k = 2$.

$$\sqrt[3]{216\,i} = 6\cdot\left(\cos\frac{9\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{9\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 6\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$
$$= 6\cdot(0 - i) \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= -6i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_3$$

(vergl. Erkl. 192)

Aufgabe 69. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[4]{-16\,i}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 84 ist:

$$\sqrt[n]{-a\,i} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+3)\pi}{2n} + i\sin\frac{(4k+3)\pi}{2n}\right]$$

Im gegebenen Wurzelausdruck ist:

$$a = 16; \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[4]{16} = 2$$
$$k = 0,\ 1,\ 2 \text{ und } 3; \qquad n = 4$$

folglich erhält man für:

Erkl. 193. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

sein. Die nebenstehende Rechnung ergibt:

$$\begin{array}{r} +0{,}76536 + 1{,}84776\,i \\ -1{,}84776 + 0{,}76536\,i \\ -0{,}76536 - 1{,}84776\,i \\ +1{,}84776 - 0{,}76536\,i \\ \hline =0 \end{array}$$

1) $k = 0$.

$$\sqrt[4]{-16\,i} = 2\cdot\left(\cos\frac{3\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{3\cdot 180^0}{8}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 67^0\,30' + i\sin 67^0\,30')$$
$$= 2\cdot(0{,}38268 + 0{,}92388\,i)$$
$$= 0{,}76536 + 1{,}84776\,i \;\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1$.

$$\sqrt[4]{-16\,i} = 2\cdot\left(\cos\frac{7\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{7\cdot 180^0}{8}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 157^0\,30' + i\sin 157^0\,30')$$
$$= 2\cdot(-\cos 22^0\,30' + i\sin 22^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(-0{,}92388 + 0{,}38268\,i)$$
$$= -1{,}84776 + 0{,}76536\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2$.

$$\sqrt[4]{-16\,i} = 2\cdot\left(\cos\frac{11\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{11\cdot 180^0}{8}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 247^0\,30' + i\sin 247^0\,30')$$
$$= 2\cdot(-\cos 67^0\,30' - i\sin 67^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= -0{,}76536 - 1{,}84776\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3$.

$$\sqrt[4]{-16\,i} = 2\cdot\left(\cos\frac{15\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{15\cdot 180^0}{8}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 337^0\,30' + i\sin 337^0\,30')$$
$$= 2\cdot(\cos 22^0\,30' - i\sin 22^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= 1{,}84776 - 0{,}76536\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_4$$

(vergl. Erkl. 193)

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 70. Von nachfolgenden Wurzelausdrücken sind die verschiedenen Werte zu berechnen:

a) $\sqrt[3]{35 - 23i}$

b) $\sqrt[4]{-15 + \sqrt{-31}}$

c) $\sqrt[4]{+625}$

d) $\sqrt[5]{-243}$

e) $\sqrt[3]{+27i}$

f) $\sqrt{-81i}$

Andeutungen.

a) Die Auflösung hat nach der Formel:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

zu erfolgen.

b) Die Auflösung kann nach vorstehender Formel oder nach der Formel:

$$\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left\{\cos\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right] + i \sin\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right]\right\}$$

erfolgen; im ersteren Falle ist für $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+\sqrt{31}}{-15}$, im letzteren $= \frac{-\sqrt{31}}{+15}$ zu setzen (siehe Aufgabe 65 und Erkl. 188).

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 66.

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 67.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 68.

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 69.

---

b) Ueber das graphische Radizieren.

Anmerkung 10. Da sich die graphische Darstellung von Wurzeln aus komplexen Zahlen nicht ohne Berechnung einzelner Teile der Wurzeln ausführen lässt, so begnügen wir uns hier mit der graphischen Darstellung der Quadratwurzeln.

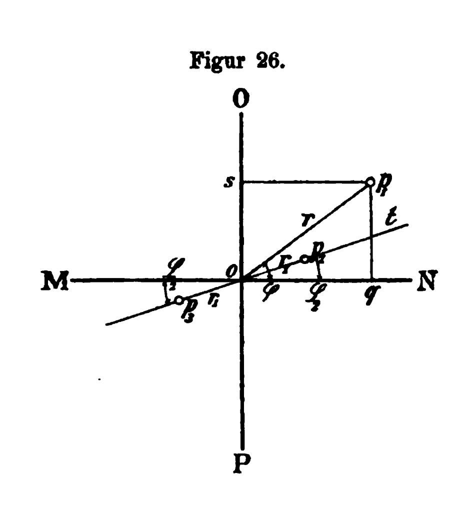
Frage 86. Wie findet man in der Zahlenebene durch Zeichnung den Punkt, welcher die Quadratwurzel einer komplexen Zahl $a + bi$ darstellt?

Antwort. (Fig. 26.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq = +a$ und $os = +bi$ auf MN bezw. OP Normale; ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den gegebenen Radikandus dar.

Man verbinde p_1 mit o, halbiere den Winkel $p_1oq = \varphi$, weil:

$$\sqrt[2]{a+bi} = \sqrt[2]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

ist (nach Antwort auf Frage 80), und trage von o aus auf dieser Halbierungslinie das Stück $\sqrt[2]{r}$ oder, da $r = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$ ist, das Stück $\sqrt[2]{\sqrt{a^2+b^2}}$ oder $\sqrt[4]{a^2 + b^2}$



Figur 26.

(nach Erkl. 8) ab. Der Endpunkt p_2 dieser Strecke stellt dann $\sqrt{a+bi}$ dar.

Da jede Quadratwurzel zwei Werte hat, die sich nur durch das Vorzeichen von einander unterscheiden, so muss es noch einen zweiten Punkt geben, welcher $\sqrt{a+bi}$ darstellt. Dieser Punkt (p_3) liegt auf der Verlängerung der Halbierungslinie des Winkels φ und ist ebenfalls um das Stück $\sqrt{r}$ vom Nullpunkte entfernt.

Beweis. Die zu p_3 gehörende komplexe Zahl ist:

$$\sqrt[2]{r}\cdot\left[\cos\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

oder, da:

$$\cos\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)=-\cos\frac{\varphi}{2}$$

und

$$\sin\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)=-\sin\frac{\varphi}{2} \text{ (n. Erkl. 101)}$$

ist:

$$\sqrt[2]{r}\cdot\left(-\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

oder:

$$-\sqrt[2]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

d. i. das Entgegengesetzte von:

$$+\sqrt[2]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

Die Summe beider Werte gibt 0, wie es der Satz in Erkl. 180 verlangt.

α) Gelöste Aufgabe.

Aufgabe 71. Es sind die beiden Werte von:

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}}$$

zu berechnen und graphisch darzustellen.

Erkl. 194. Da $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-\sqrt{8}}{+1}=-2{,}8284$ ist, so liegt φ im vierten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi = 2{,}8284$$
$$\operatorname{tg}70^0\,30' = 2{,}8239$$
Rest: 45

Differenz für 1 Minute = 26,3. Mithin kommt zum Winkel $70^0\,30'$ noch:

$$\frac{45}{26{,}3}=1\frac{187'}{263}=1'\,43''$$

Demnach ist:

$$\varphi=360^0-70^0\,31'\,43''=289^0\,28'\,17''$$

Auflösung. (Figur 27.) Nach Antwort auf Frage 82 ist:

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$n=2;\quad a=1;\quad b=\sqrt{8}$$

$$\sqrt[n]{r}=\sqrt[2]{\sqrt[2]{1^2+(\sqrt{8})^2}}=\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}=1{,}732\cdots$$

$k=0$ und 1; $\varphi=289^0\,28'\,17''$ (n. Erkl. 194)

folglich erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}} = 1{,}732\cdot\left[\cos\left(\frac{289^0\,28'\,17''+0}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\,i\sin\left(\frac{289^0\,28'\,17''+0}{2}\right)\right]$$
$$= 1{,}732\cdot(\cos 144^0\,44'\,8'' + i\sin 144^0\,44'\,8'')$$
$$= 1{,}732\cdot(-\cos 35^0\,15''\,52'' + i\sin 35^0\,15'\,52'')$$
(nach Erkl. 101)
$$= 1{,}732\cdot(-0{,}81649 + 0{,}57736) \text{ (n. Erkl. 195)}$$
oder auf 3 Dezimalstellen genau:
$$\sqrt{1-\sqrt{-8}} = -1{,}414 + 0{,}999\,i = -\sqrt{2}+i$$

2) $k = 1$.

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}} = 1{,}732\cdot$$
$$\left[\cos\left(\frac{289^0\,28'\,17''+2\cdot 1\cdot 180^0}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\,i\sin\left(\frac{289^0\,28'\,17''+2\cdot 1\cdot 180^0}{2}\right)\right]$$
$$= 1{,}732\cdot\left(\cos\frac{649^0\,28'\,17''}{2} + i\sin\frac{649^0\,28'\,17''}{2}\right)$$
$$= 1{,}732\cdot(\cos 324^0\,44'\,8'' + i\sin 324^0\,44'\,8'')$$
(nach Erkl. 131)
$$= 1{,}732\cdot(\cos 35^0\,15'\,52'' - i\sin 35^0\,15'\,52'')$$
(nach Erkl. 101)
$$= 1{,}732\cdot(0{,}81649 - 0{,}57736) \text{ (nach Erkl. 195)}$$
oder auf 3 Dezimalstellen genau:
$$\sqrt{1-\sqrt{-8}} = 1{,}414 - 0{,}999\,i = \sqrt{2}-i$$
(vergl. Erkl. 196)

Die diese beiden Werte in der Zahlenebene darstellenden Punkte findet man auf folgende Weise:

Man errichtet in den Endpunkten der Strecken $oq = +1$ und $os = -\sqrt{-8} = -2{,}828\,i$ auf MN bezw. OP Normale, verbinde ihren Schnittpunkt p_1 mit o, halbiere den Winkel qop_1 und trage auf tu von o nach beiden Seiten hin die Strecke:
$$r_1 = \sqrt{r} = 1{,}732$$
ab; die Endpunkte p_2 und p_3 sind die gesuchten Punkte von:
$$\sqrt[2]{1-\sqrt{-8}}$$

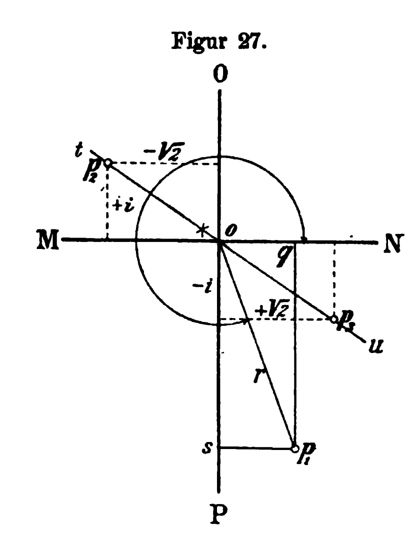
Erkl. 195. Man erhält für:

$\cos 35^0\,15'\,52'' = 0{,}81748$ $(= \cos 35^0\,10')$
$-\quad 99$ $\left(= \text{Differenz für } 5\frac{18'}{15}\right)$
$= 0{,}81649$

$\sin 35^0\,15'\,52'' = 0{,}57596$ $(= \sin 35^0\,10')$
$+\quad 140$ $\left(= \text{Differenz für } 5\frac{18'}{15}\right)$
$= 0{,}57736$

Erkl. 196. Nach Erkl. 180 soll:
$$x_1 + x_2 = 0$$
sein. Aus nebenstehender Rechnung folgt:
$$-\sqrt{2}+i$$
$$+\sqrt{2}-i$$
$$= 0$$

Figur 27.



β) Ungelöste Aufgabe.

Aufgabe 72. Es sind die beiden Werte von:
$$\sqrt[2]{3+4i}$$
rechnerisch und graphisch zu ermitteln.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 71.

c). Ueber die Auflösung der binomischen Gleichungen.

Frage 87. Was versteht man unter einer binomischen Gleichung?

Erkl. 197. Die binomischen (d. h. zweigliedrigen) Gleichungen sind sog. reine höhere Gleichungen, weil ihre unbekannte Grösse nur einmal vorkommt.

Antwort. Unter einer binomischen Gleichung versteht man eine Gleichung von der Form:

$$y^n \pm a = 0$$

in welcher a irgend eine reelle Zahl bedeutet.

Frage 88. Wie lässt sich eine beliebige binomische Gleichung auf die Form:

$$x^n \pm 1 = 0$$

bringen?

Antwort. Setzt man in die Gleichung:

$$y^n \pm a = 0$$

für $y^n = ax^n$ oder für $y = x \cdot \sqrt[n]{a}$ ein, so erhält man:

$$y^n \pm a = ax^n \pm a = 0$$

Dividiert man die ganze Gleichung durch a, so ergibt sich:

$$\frac{ax^n}{a} \pm \frac{a}{a} = 0$$

oder:

$$x^n \pm 1 = 0 \quad \text{(nach Erkl. 19)}$$

Auf diese Form kann man jede binomische Gleichung bringen, sobald man für $y = x \cdot \sqrt[n]{a}$ einsetzt.

Die Auflösung binomischer Gleichungen besteht also vorzugsweise in der Aufsuchung der verschiedenen Wurzelwerte der Gleichung $x^n \pm 1 = 0$.

Frage 89. Wie findet man die verschiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$x^n \pm 1 = 0?$$

Erkl. 198. Ein Satz aus der Lehre von den Gleichungen lautet:

„Jede Gleichung hat ebensoviele Wurzeln, als der höchste Exponent der Unbekannten Einheiten besitzt."

Hiernach besitzt die Gleichung $x^n \pm 1 = 0$ n verschiedene Wurzeln.

Antwort. Aus $x^n \pm 1 = 0$ folgt:

$$x^n = \mp 1$$

und

$$x = \sqrt[n]{\mp 1}$$

Demnach sind die Wurzeln der Gleichung $x^n \pm 1 = 0$ dieselben wie die Werte der $n$ten Wurzeln aus der negativen bezw. positiven Einheit.

Nach der Antwort auf Frage 82 war:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

Aus der ersten Formel erhält man sämtliche n Wurzeln der Gleichung:

$$x^n - 1 = 0$$

aus der zweiten Formel sämtliche n Wurzeln der Gleichung:

$$x^n + 1 = 0$$

wenn man in diese Formeln für k nacheinander die Werte:

$$0, 1, 2, 3 \cdots (n-1)$$

einsetzt.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 73. Es sind die verschiedenen Wurzeln der nachfolgenden binomischen Gleichungen zu berechnen:

a) $x^2 - 1 = 0$
b) $x^3 + 1 = 0$
c) $x^4 - 1 = 0$
d) $x^5 + 1 = 0$

Erkl. 199. Aus der Lehre von den höheren Gleichungen ergeben sich folgende Sätze:

1) Jede Gleichung von geradem Grade, deren letztes Glied das Minuszeichen führt, hat mindestens zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative. [Vergl. die Aufgaben 73, a) und c)].
2) Jede Gleichung von ungeradem Grade hat mindestens eine reelle Wurzel, welche das entgegengesetzte Vorzeichen des letzten Gliedes führt. [Vergl. die Aufgaben 73, b) und d)].
3) Besitzt eine Gleichung mit reellen Koëffizienten eine Wurzel von der Form $a + bi$, so ist $a - bi$ ebenfalls eine Wurzel dieser Gleichung. (Es kommen hiernach die komplexen Wurzeln stets in gerader Anzahl vor.) [Vergl. die Aufgaben 73, b) und d)].
4) Die reellen Wurzeln einer Gleichung kommen stets in gerader Anzahl vor, wenn die Gleichung von geradem Grade ist, jedoch in ungerader Anzahl, wenn der höchste Exponent der Unbekannten eine ungerade Zahl ist. (Vergl. nebenstehende Aufgabe.)

Auflösungen.

a) Man findet die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 - 1 = 0$ aus der Formel:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

wenn man für $n = 2$ und für k die Werte 0 und 1 einsetzt. Man erhält alsdann für:

1) $k = 0$.

$$x_1 = \sqrt{+1} = \cos\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{2} + i\sin\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{2}$$
$$= \cos 0^0 + i\sin 0^0 = +1$$

2) $k = 1$.

$$x_2 = \sqrt{+1} = \cos\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{2} + i\sin\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{2}$$
$$= \cos 180^0 + i\sin 180^0 = -1 + 0i = -1$$

(Probe: $x_1 + x_2 = +1 - 1 = 0$; s. Erkl. 180.)

---

b) Die 3 Wurzeln der Gleichung $x^3 + 1 = 0$ findet man aus der Formel:

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

wenn man in dieselbe für $n = 3$ und für k nacheinander die Werte 0, 1 und 2 einsetzt. Dann ergibt sich für:

1) $k = 0$.

$$x_1 = \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{3} + i\sin\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{3}$$
$$= \cos 60^0 + i\sin 60^0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

2) $k = 1$.

$$x_2 = \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{3} + i\sin\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{3}$$
$$= \cos 180^0 + i\sin 180^0 = -1 + 0i = -1$$

3) $k = 2.$

$$x_3 = \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{3} + i\sin\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{3}$$
$$= \cos 300^0 + i\sin 300^0 = \cos 60^0 - i\sin 60^0 \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 = +\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} = 0.$)

---

c) Die Berechnung der 4 Wurzeln der Gleichung $x^4 - 1 = 0$ geschieht mittels der Formel:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

in welche man für $n = 4$ und für k nacheinander die Werte 0, 1, 2 und 3 einzusetzen hat. Dann erhält man für:

1) $k = 0.$

$$x_1 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{4} = \cos 0^0 + i\sin 0^0 = +1$$

2) $k = 1.$

$$x_2 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{4} = \cos 90^0 + i\sin 90^0 = +i$$

3) $k = 2.$

$$x_3 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 2\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 2\cdot 180^0}{4} = \cos 180^0 + i\sin 180^0$$
$$= -1 + 0i = -1$$

4) $k = 3.$

$$x_4 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 3\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 3\cdot 180^0}{4} = \cos 270^0 + i\sin 270^0 = -i$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = +1 + i - 1 - i = 0.$)

---

d) Die Gleichung $x^5 + 1$ hat 5 Wurzeln, welche man aus der Formel:

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

findet, wenn man in dieselbe für $n = 5$ und für k nacheinander die Werte 0, 1, 2, 3 und 4 einsetzt. Man erhält dann für:

1) $k = 0.$

$$x_1 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 36^0 + i\sin 36^0 = 0{,}80902 + 0{,}58779\,i$$

2) $k = 1.$

$$x_2 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 108^0 + i\sin 108^0 = -\cos 72^0 + i\sin 72^0 \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= -0{,}30902 + 0{,}95106\,i$$

3) $k = 2$.

$$x_3 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 2 + 1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 2 + 1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 180^0 + i\sin 180^0 = -1 + 0\cdot i = -1$$

4) $k = 3$.

$$x_4 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 3 + 1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 3 + 1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 252^0 + i\sin 252^0 = -\cos 72^0 - i\sin 72^0 \text{ (nach Erkl. 101)}$$
$$= -0{,}30902 - 0{,}95106\,i$$

5) $k = 4$.

$$x_5 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 4 + 1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 4 + 1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 324^0 + i\sin 324^0 = \cos 36^0 - i\sin 36^0$$
$$= 0{,}80902 - 0{,}58779\,i$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = +0{,}80902 + 0{,}58779\,i - 0{,}30902 + 0{,}95106\,i - 1 - 0{,}30902 - 0{,}95106\,i + 0{,}80902 - 0{,}58779\,i = 0$; vergl. Erkl. 180.)

β) Ungelöste Aufgabe.

Aufgabe 74. Es sind die verschiedenen Werte der nachfolgenden binomischen Gleichungen zu berechnen:

a) $x^2 + 1 = 0$
b) $x^3 - 1 = 0$
c) $x^4 + 1 = 0$
d) $x^5 - 1 = 0$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 73, a) bis d).

E. Ueber die Beziehungen zwischen den Potenzen von Sinus und Cosinus eines Winkels und dem Sinus und Cosinus vom Vielfachen dieses Winkels.

Anmerkung 11. Zum Verständnis dieses Teiles unseres Lehrbuches sind diejenigen Kenntnisse der Goniometrie und der Logarithmenrechnung erforderlich, welche durch das Studium der in dieser Encyklopädie erschienenen Lehrbücher der Goniometrie und der Logarithmen von Dr. A. Kleyer erworben werden können.

a) Ueber die Darstellung der Potenzen von Sinus und Cosinus eines Winkels durch Sinus und Cosinus vom Vielfachen dieses Winkels.

Frage 90. Auf welche Weise lässt sich $\cos^n\varphi$ durch den Cosinus vom Vielfachen des Winkels φ ausdrücken?

Antwort. Setzt man für:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = a$$

und für:

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = b$$

so gibt:

$$a + b = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\cos\varphi$$

und demnach:

$$2^n\cos^n\varphi = (a + b)^n$$

Wird die rechte Seite dieser Gleichung nach der Formel des binomischen Lehrsatzes (siehe Erkl. 79) entwickelt, so erhält man, wenn n eine positive Ganzzahl ist, folgende Gleichung:

$$2^n \cdot \cos^n\varphi = a^n + n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 + \cdots + na\cdot b^{n-1} + b^n$$

oder, wenn man:

$a^{n-2}\cdot a$ statt a^{n-1}
$a^{n-4}\cdot a^2$ statt a^{n-2}
$a^{n-6}\cdot a^3$ statt a^{n-3}
$b^{n-2}\cdot b$ statt $b^{n-1}\ldots$

setzt:

$$2^n \cdot \cos^n\varphi = a^n + n\cdot a^{n-2}\cdot ab + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-4}\cdot a^2b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-6}\cdot a^3b^3 + \cdots + nb^{n-2}\cdot ab + b^n$$

Vereinigt man das erste und letzte, zweite und vorletzte u. s. w. — kurz, stets die beiden Glieder der vorstehenden Binominalreihe, bei welchen die gleichen Koëffizienten [n, $\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}$, $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ u. s. w.] und die gleichen Potenzen von a und b (ab, a^2b^2, a^3b^3 u. s. w.) vorkommen, so ergibt sich:

$$2^n\cdot\cos^n\varphi = (a^n+b^n) + n\cdot(a^{n-2}+b^{n-2})\cdot ab + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot(a^{n-4}+b^{n-4})\cdot a^2b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(a^{n-6}+b^{n-6})\cdot a^3b^3 + \cdots$$

Weil nun:

$$ab = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(\cos\varphi - i\sin\varphi) = 1$$

also:

$$a^n\cdot b^n = 1^n = 1$$

ferner:

$$a^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

und

$$b^n = (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$$

(nach Antwort auf Frage 76)

ist, demnach für:

$$a^n + b^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi + \cos n\varphi - i\sin n\varphi = 2\cos n\varphi$$

also für:

$$a^{n-2} + b^{n-2} = 2\cdot\cos(n-2)\varphi$$
$$a^{n-4} + b^{n-4} = 2\cdot\cos(n-4)\varphi \text{ u. s. w.}$$

gesetzt werden kann, so folgt:

Erkl. 200. Dass das mittelste Glied von $(a+bi)^n$ bei geradem n:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\frac{n}{2}}\cdot a^{\frac{n}{2}}\cdot b^{\frac{n}{2}}$$

ist und die Reihe eine ungerade Anzahl von Gliedern besitzt, soll durch die folgenden beiden Beispiele nachgewiesen werden.

Man erhält für:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Das mittelste von den 7 Gliedern ist hiernach $20a^3b^3$. Setzt man in die Formel:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot 2\cdots\cdots\frac{n}{2}}\cdot a^{\frac{n}{2}}\cdot b^{\frac{n}{2}}$$

für $n = 6$ ein, so folgt:

$$\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{\frac{6}{2}}\cdot b^{\frac{6}{2}} = 20a^3b^3$$

Ferner gibt:

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

Das mittelste von diesen 9 Gliedern ist $70a^4b^4$. Setzt man in die Formel:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\frac{n}{2}}\cdot a^{\frac{n}{2}}\cdot b^{\frac{n}{2}}$$

für $n = 8$ ein, so ergibt sich:

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot a^{\frac{8}{2}}\cdot b^{\frac{8}{2}} = 70a^4b^4$$

Erkl. 201. Dass jedes der beiden mittleren Glieder von $(a+bi)^n$ bei ungeradem n:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot(a+b)\cdot a^{\frac{n-1}{2}}\cdot b^{\frac{n-1}{2}}$$

ist und die Reihe eine gerade Anzahl von Gliedern besitzt, soll durch die folgenden beiden Beispiele nachgewiesen werden.

Man erhält für:

$$(a+b)^7 = a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3 + 35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$$

Die beiden mittleren von den 8 Gliedern sind hiernach $35a^4b^3$ und $35a^3b^4$. Setzt man in die Formel für $n=7$ ein, so ergibt sich:

$$\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\cdot(a+b)\cdot a^3b^3 = 35a^4b^3+35a^3b^4$$

Man erhält ferner für:

$$(a+b)^9 = a^9+9a^8b+36a^7b^2+84a^6b^3 + 126a^5b^4+126a^4b^5+84a^3b^6 + 36a^2b^7+9ab^8+b^9$$

Die beiden mittleren von den 10 Gliedern sind hiernach $126a^5b^4$ und $126a^4b^5$. Setzt man in die Formel für $n=9$ ein, so ergibt sich:

$$\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot(a+b)\cdot a^4b^4 = 126a^5b^4+126a^4b^5$$

$$2^n\cdot\cos^n\varphi = 2\cos n\varphi+2n\cos(n-2)\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cos(n-4)\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cos(n-6)\varphi+\cdots$$

Ist der Exponent n eine gerade Zahl, so besitzt die Binominalreihe eine ungleiche Anzahl von Gliedern und es ist das mittelste Glied dieser Reihe offenbar:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}\cdot a^{\frac{n}{2}}\cdot b^{\frac{n}{2}}$$ (vgl. Erkl. 200)

und weil:

$$a^{\frac{n}{2}}\cdot b^{\frac{n}{2}} = 1 \text{ oder } = 2\cdot\frac{1}{2}$$

ist, so erhält man

bei geradem n

für:

$$2^n\cdot\cos^n\varphi = 2\cos n\varphi+2n\cos(n-2)\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos(n-6)\varphi+\cdots + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}$$

Dividiert man die ganze Gleichung durch 2, so ergibt sich:

$$2^{n-1}\cdot\cos^n\varphi = \cos n\varphi+n\cdot\cos(n-2)\varphi+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos(n-6)\varphi+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}$$

oder:

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos n\varphi+n\cdot\cos(n-2)\varphi+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos(n-6)\varphi\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}\right]$$

Ist der Exponent n eine ungerade Zahl, so hat die Binominalreihe eine gleiche Anzahl von Gliedern und es haben die beiden mittleren Glieder offenbar den Koëffizienten:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$ (vergl. Erkl. 201)

sowie das eine Glied die Hauptgrösse:

$$a^{\frac{n+1}{2}} \cdot b^{\frac{n-1}{2}}$$

das andere die Hauptgrösse:

$$a^{\frac{n-1}{2}} \cdot b^{\frac{n+1}{2}}$$

Die beiden Glieder geben demnach vereinigt:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \left(\frac{n+3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots \left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(a^{\frac{n+1}{2}} \cdot b^{\frac{n-1}{2}} + a^{\frac{n-1}{2}} \cdot b^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

oder, da:

$$a^{\frac{n+1}{2}} \cdot b^{\frac{n-1}{2}} + a^{\frac{n-1}{2}} \cdot b^{\frac{n+1}{2}} = (a+b) \cdot a^{\frac{n-1}{2}} \cdot b^{\frac{n-1}{2}}$$

ist:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \left(\frac{n+3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots \left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot (a+b) \cdot a^{\frac{n-1}{2}} \cdot b^{\frac{n-1}{2}}$$

oder endlich, weil:

$$a + b = 2 \cos\varphi$$

und

$$a^{\frac{n-1}{2}} \cdot b^{\frac{n-1}{2}} = 1$$

ist:

$$\frac{2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \left(\frac{n+3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots \left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \cos\varphi$$

Man erhält also

für: bei ungeradem n

$$2^n \cdot \cos^n\varphi = 2 \cdot \cos n\varphi + n \cdot \cos(n-2)\varphi + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \cos(n-4)\varphi + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \cos(n-6)\varphi + \cdots + \frac{2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \left(\frac{n+3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots \left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \cos\varphi$$

oder, wenn man die ganze Gleichung durch 2 teilt:

$$2^{n-1} \cdot \cos^n\varphi = \cos n\varphi + n \cos(n-2)\varphi + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \cos(n-4)\varphi + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \cos(n-6)\varphi + \cdots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \left(\frac{n+3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots \left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \cos\varphi$$

oder endlich:

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left[\cos n\varphi + n \cdot \cos(n-2)\varphi + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \cos(n-4)\varphi + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \cos(n-6)\varphi + \cdots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \left(\frac{n+3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots \left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \cos\varphi\right]$$

Frage 91. Auf welche Weise lässt sich $\sin^n\varphi$ durch den Sinus bezw. Cosinus vom Vielfachen des Winkels φ ausdrücken?

Antwort. Ist:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = a$$

und

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = b$$

so gibt:

$$a - b = \cos\varphi + i\sin\varphi - \cos\varphi + i\sin\varphi = 2i\sin\varphi$$

also ist:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n\varphi = (a-b)^n$$

Wird die rechte Seite dieser Gleichung nach der Formel des binomischen Lehrsatzes (siehe Erkl. 79) entwickelt, so erhält man, wenn n eine positive Ganzzahl ist:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n\varphi = a^n - n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2$$
$$- \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \cdots \pm b^n$$

Setzt man wiederum (wie bei der vorhergehenden Antwort) für:

$$a^{n-1} = a \cdot a^{n-2} \text{ u. s. w.}$$

ein, so ergibt sich:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n\varphi = a^n - n \cdot a^{n-2} \cdot ab + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2} \cdot a^{n-4} \cdot a^2 b^2$$
$$- \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot a^{n-6} \cdot a^3 b^3 + \cdots + n \cdot a b^{n-1} \pm b^n$$

und nach Vereinigung des ersten und letzten, zweiten und vorletzten u. s. w. Gliedes:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n\varphi = (a^n \pm b^n) - n \cdot (a^{n-2} \pm b^{n-2}) \cdot ab + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2} \cdot (a^{n-4} \pm b^{n-4}) \cdot a^2 b^2$$
$$- \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot (a^{n-6} \pm b^{n-6}) \cdot a^3 b^3 + \cdots$$

oder, weil:

$$ab = a^2 b^2 = a^3 b^3 = \cdots = +1$$

ist:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n\varphi = (a^n \pm b^n) - n \cdot (a^{n-2} \pm b^{n-2}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2} \cdot (a^{n-4} \pm b^{n-4})$$
$$- \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot (a^{n-6} \pm b^{n-6}) + \cdots$$

Ist n eine gerade Zahl, so ist das letzte Glied b^n der in ungerader Anzahl vorhandenen Glieder positiv, das vorhergehende negativ u. s. w., und man erhält als erstes Glied auf der rechten Seite vorstehender Gleichung:

$$(a^n + b^n)$$

als zweites Glied:

$$-n \cdot (a^{n-2} + b^{n-2}) \text{ u. s. w. (s. Erkl. 202)}$$

Erkl. 202. In der Binominalreihe für $(a-b)^n$ erhält man dieselben Glieder wie für $(a+b)^n$, nur wechseln bei $(a-b)^n$ die Vorzeichen der Glieder regelmässig ab. Da bei geradem n sich eine ungleiche Anzahl von Gliedern ergibt, da das erste Glied stets positiv, das zweite stets negativ ist, so trägt das letzte Glied das Pluszeichen. Da ferner bei ungeradem n die Reihe eine gerade Anzahl von Gliedern hat und das erste, dritte, fünfte u. s. w. immer das Pluszeichen, dagegen

das zweite, vierte, sechste u. s. w. immer das Minuszeichen führt, so ist das letzte Glied negativ.

Setzt man (wie in Antwort auf Frage 90) für:

$$a^n + b^n = 2\cos n\varphi$$
$$a^{n-2} + b^{n-2} = 2\cdot\cos(n-2)\varphi \text{ u. s. w.}$$

ferner für:

$$i^n = i^{2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n}{2}}$$

und für das mittelste Glied:

$$\pm 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}} \quad \text{(siehe Erkl. 200)}$$

so erhält man

bei geradem n:

$$2^n\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\sin^n\varphi = 2\cos n\varphi - 2n\cos(n-2)\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi$$
$$-\frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos(n-6)\varphi + \cdots \pm 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}$$

Dividiert man die ganze Gleichung durch 2, so ergibt sich:

$$2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\sin^n\varphi = \cos n\varphi - n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi$$
$$-\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-6)\varphi + \cdots \pm\frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}$$

oder:

$$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}}\cdot\left[\cos n\varphi - n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi\right.$$
$$\left.-\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-6)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}\right]$$

Ist n eine ungerade Zahl, so ist das letzte Glied b^n der in gerader Anzahl vorkommenden Glieder negativ, das vorletzte positiv u. s. w., und man erhält demnach in obiger Gleichung als erstes Glied der rechten Seite:

$$(a^n - b^n)$$

als zweites Glied:

$$-n\cdot(a^{n-2} - b^{n-2})$$

denn:

$$-n\cdot a^{n-2}\cdot ab + n\cdot b^{n-2}\cdot ab = -n\cdot(a^{n-2} - b^{n-2})ab \text{ u. s. w}$$

Da nun:

$$a^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

und

$$b^n = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$$

ist, so gibt:

$$a^n - b^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi - \cos n\varphi + i\sin n\varphi = 2i\sin n\varphi$$

ebenso:

$$a^{n-2} - b^{n-2} = 2i\sin(n-2)\varphi \quad \text{u. s. w.}$$

Demnach erhält man, da die beiden Mittelglieder der Binominalreihe vereinigt:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot(a-b)\cdot a^{\frac{n-1}{2}}\cdot b^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{(siehe Erkl. 201)}$$

oder, weil:

$$a - b = 2i\sin\varphi$$

und

$$a^{\frac{n-1}{2}}\cdot b^{\frac{n-1}{2}} = +1$$

ist:

$$\frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot i\cdot\sin\varphi$$

ergeben,

bei ungeradem n:

$$2^n\cdot i^n\cdot\sin^n\varphi = 2i\sin n\varphi - 2n\cdot i\sin(n-2)\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot i\cdot\sin(n-4)\varphi$$

$$-\frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot i\cdot\sin(n-6)\varphi + \cdots \pm \frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot i\sin\varphi$$

Dividiert man die ganze Gleichung durch $2i$, so ergibt sich:

$$2^{n-1}\cdot i^{n-1}\cdot\sin^n\varphi = \sin n\varphi - n\cdot\sin(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\sin(n-4)\varphi$$

$$-\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\sin(n-6)\varphi + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\sin\varphi$$

oder, weil:

$$i^{n-1} = i^{2\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

ist:

$$\sin n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\cdot\left[\sin n\varphi - n\cdot\sin(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\sin(n-4)\varphi\right.$$

$$\left. -\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\sin(n-6)\varphi + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\sin\varphi\right]$$

Anmerkung 12. Da die in den Antworten auf die Fragen 90 und 91 abgeleiteten vier Formeln für die Integralrechnung von Wichtigkeit sind, so kann dem Studierenden nicht genug empfohlen werden, sich diese Formeln, ihre Ableitung und Anwendung gründlich einzuüben.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 75. Es ist:

a) $\cos^5\varphi$

b) $\cos^6\varphi$

durch den Cosinus vom Vielfachen des Winkels φ auszudrücken.

Auflösung.

a) In $\cos^5\varphi$ ist der Exponent eine ungerade Zahl, demnach erfolgt die Berechnung nach der Formel:

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdots}{1\cdot 2\cdots\cdots}\cdot\cos\varphi\right]$$

in welche man für $n = 5$ einzusetzen hat. Man erhält alsdann:

$$\cos^5\varphi = \frac{1}{2^4}\cdot\left(\cos 5\varphi + 5\cdot\cos 3\varphi + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\cos\varphi\right)$$
$$= \frac{1}{16}\cdot(\cos 5\varphi + 5\cdot\cos 3\varphi + 10\cos\varphi)$$

b) In $\cos^6\varphi$ ist der Exponent eine gerade Zahl, demnach erfolgt die Berechnung nach der Formel:

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left(\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots}\right)$$

in welche man für $n = 6$ einzusetzen hat. Dann ergibt sich:

$$\cos^6\varphi = \frac{1}{2^5}\cdot\left(\cos 6\varphi + 6\cdot\cos 4\varphi + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\right)$$
$$= \frac{1}{32}\cdot(\cos 6\varphi + 6\cdot\cos 4\varphi + 15\cdot\cos 2\varphi + 10)$$

Aufgabe 76. Was erhält man mittelst der in Aufgabe 75 abgeleiteten Formeln für:

a) $\cos^5 60^0$?

b) $\cos^6 60^0$?

Erkl. 203. Da $\cos 60^0 = 0{,}5$ ist, so gibt:

$$\cos^5 60^0 = 0{,}5^5$$

d. i.:

$$= 0{,}03125$$

und

$$\cos^6 60^0 = 0{,}5^6$$

d. i.:

$$= 0{,}015625$$

Auflösung.

a) Nach voriger Auflösung ist:

$$\cos^5\varphi = \frac{1}{16}\cdot(\cos 5\varphi + 5\cdot\cos 3\varphi + 10\cdot\cos\varphi)$$

Demnach gibt:

$$\cos^5 60^0 = \frac{1}{16}\cdot(\cos 300^0 + 5\cdot\cos 180^0 + 10\cdot\cos 60^0)$$

oder, weil:

$$\cos 300^0 = \cos 60^0 \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$\cos 180^0 = -1$$

und

$$\cos 60^0 = 0{,}5$$

ist:

$$\cos^5 60^0 = \frac{1}{16}\cdot(0{,}5 - 5 + 5) = \frac{1}{16}\cdot 0{,}5 = 0{,}03125$$

(vergl. Erkl. 203)

b) Nach der Auflösung von Aufgabe 75, b) ist:

$$\cos^6\varphi = \frac{1}{32}\cdot(\cos 6\varphi + 6\cos 4\varphi + 15\cos 2\varphi + 10)$$

Demnach erhält man für:

$$\cos^6 60^0 = \frac{1}{32}\cdot(\cos 360^0 + 6\cos 240^0 + 15\cos 120^0 + 10)$$

oder, weil:

$$\cos 360^0 = 1$$
$$\cos 240^0 = + \cos 60^0 = 0{,}5$$
$$\cos 120^0 = - \cos 60^0 = - 0{,}5$$

ist:

$$\cos^6 60^0 = \frac{1}{32}\cdot(1 + 3 - 7{,}5 + 10) = \frac{1}{32}\cdot 0{,}5 = 0{,}015625 \quad \text{(vergl. Erkl. 203)}$$

Aufgabe 77. Es ist:

a) $\sin^3 \varphi$

b) $\sin^4 \varphi$

durch den Sinus vom Vielfachen des Winkels φ auszudrücken.

Auflösung.

a) In $\sin^3 \varphi$ ist der Exponent ungerade, folglich ist hier die Formel:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\cdot[\sin n\varphi - n\cdot\sin(n-2)\varphi + \cdots]$$

anzuwenden. Man erhält, wenn man in diese Gleichung für $n = 3$ einsetzt:

$$\sin^3 \varphi = \frac{1}{2^2\cdot(-1)^1}\cdot(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi) = -\frac{1}{4}\cdot(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi)$$

b) Die Berechnung von $\sin^4 \varphi$ hat, weil der Exponent eine gerade Zahl ist, nach der Formel:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}}\cdot\left[\cos n\varphi - n\cdot\cos(n-2)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdots}{1\cdot 2\cdots\cdots}\right]$$

zu erfolgen. Setzt man in dieselbe für $n = 4$ ein, so ergibt sich:

$$\sin^4 \varphi = \frac{1}{2^3\cdot(-1)^2}\cdot\left(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\right) = \frac{1}{8}\cdot(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3)$$

Aufgabe 78. Was erhält man mittelst der in Aufgabe 77 abgeleiteten Formeln für:

a) $\sin^3 50^0$?

b) $\sin^4 50^0$?

Erkl. 204. Da $\sin 50^0 = 0{,}76604$ ist, gibt:

$$\sin^3 50^0 = 0{,}76604^3 = 0{,}44953$$

und

$$\sin^4 50^0 = 0{,}76604^4 = 0{,}34436$$

Auflösung.

a) Da nach der Auflösung voriger Aufgabe:

$$\sin^3\varphi = -\frac{1}{4}\cdot(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi)$$

ist, so erhält man für:

$$\sin^3 50^0 = -\frac{1}{4}\cdot(\sin 150^0 - 3\sin 50^0)$$

Nun ist:

$$\sin 150^0 = + \sin 30^0 = 0{,}5$$

und

$$\sin 50^0 = 0{,}76604$$

folglich gibt:

$$\sin^3 50^0 = -\frac{1}{4}\cdot(0{,}5 - 3\cdot 0{,}76604) = -\frac{1}{4}\cdot(-1{,}79812) = + 0{,}44953$$

b) Nach der Auflösung von Aufgabe 77, b) gibt:

$$\sin^4\varphi = \frac{1}{8}\cdot(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3)$$

Folglich erhält man für:

$$\sin^4 50^0 = \frac{1}{8}\cdot(\cos 200^0 - 4\cos 100^0 - 3)$$

Nun ist:

$$\cos 200^0 = -\cos 20^0 = -0{,}93969$$
$$\cos 100^0 = -\cos 80^0 = -0{,}17365$$

folglich gibt:

$$\sin^4 50^0 = \frac{1}{8}\cdot(-0{,}93969 + 4\cdot 0{,}17365 + 3) = \frac{1}{8}\cdot 2{,}75491 = 0{,}344364$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 79. Es ist:

a) $\cos^3\varphi$
b) $\cos^4\varphi$

durch den Cosinus vom Vielfachen des Winkels φ,

c) $\sin^5\varphi$
d) $\sin^6\varphi$

durch den Sinus vom Vielfachen des Winkels φ auszudrücken.

Andeutung. Auflösung analog den Auflösungen der Aufgaben 75 und 77.

Aufgabe 80. Mittelst der sich aus der Auflösung der Aufgabe 79 ergebenden Formeln sind zu berechnen:

a) $\cos^3 40^0$
b) $\cos^4 40^0$
c) $\sin^5 20^0$
d) $\sin^6 20^0$

Andeutung. Auflösung analog den Auflösungen der Aufgaben 76 und 78. Zur Probe sind die nebenstehenden Funktionen auch ohne die Formeln aus den Fragen 90 und 91 zu berechnen.

---

b) Ueber die Darstellung des Sinus und Cosinus vom Vielfachen eines Winkels durch Potenzen des Sinus und Cosinus vom einfachen Winkel.

Frage 92. Wie lässt sich:

$$\cos n\varphi$$

durch Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ausdrücken?

Antwort. Nach der Antwort auf Frage 90 ist:

$$2\cos n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n$$

Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung nach der Formel des binomischen Lehrsatzes (siehe Erkl. 79), so erhält man, wenn n eine ganze Zahl ist:

$$2\cos n\varphi = \cos^n\varphi + n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot$$
$$\cos^{n-3}\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi + \cdots$$
$$+ i^n\cdot\sin^n\varphi + \cos^n\varphi - n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi$$
$$- \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot$$
$$\cos^{n-4}\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi - \cdots \pm i^n\cdot\sin^n\varphi$$

oder vereinigt:

$$2\cos n\varphi = 2\cos^n\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi$$
$$+ 2\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi + \cdots$$

oder, weil $i^2 = -1$, $i^4 = +1 \cdots$ ist und sich aus sämtlichen Gliedern der Faktor 2 fortheben lässt:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi$$
$$- \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\cos^{n-6}\varphi\cdot\sin^6\varphi + \cdots$$

Frage 93. Wie lässt sich:

$$\sin n\varphi$$

durch Potenzen von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ ausdrücken?

Antwort. Nach der Antwort auf Frage 91 ist:

$$2i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n - (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n$$

Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung nach der Formel des binomischen Lehrsatzes, so erhält man, wenn n eine ganze Zahl ist:

$$2i\sin n\varphi = \cos^n\varphi + n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot$$
$$\cos^{n-3}\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi + \cdots$$
$$+ i^n\cdot\sin^n\varphi - \cos^n\varphi + n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi$$
$$+ \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot$$
$$\cos^{n-4}\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi + \cdots \mp i^n\cdot\sin^n\varphi$$

oder vereinigt:

$$2i\sin n\varphi = 2n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi$$
$$+ \frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\cos^{n-5}\varphi\cdot i^5\cdot\sin^5\varphi + \cdots$$

oder, da sich aus sämtlichen Gliedern der Gleichung der Faktor 2 fortheben lässt und $i^3 = -i$, $i^5 = +i$, $i^7 = -i$ u. s. w. ist:

$$i\sin n\varphi = n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot i\cdot\sin^3\varphi$$
$$+ \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\cos^{n-5}\varphi\cdot i\cdot\sin^5\varphi - \cdots$$

oder endlich, indem man die ganze Gleichung durch i dividiert:

$$\sin n\varphi = n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi$$
$$+ \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - \cdots$$

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 81. Es ist:

a) $\sin 5\varphi$

b) $\sin 6\varphi$

durch Potenzen von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ auszudrücken.

Auflösung. Setzt man in die letzte Gleichung der Antwort auf Frage 93 für $n = 5$ ein, so ergibt sich:

$$\text{a)}\quad \sin 5\varphi = 5\cdot\cos^4\varphi\cdot\sin\varphi - \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\cos^0\varphi\cdot\sin^5\varphi$$

oder:

$$= 5\cdot\cos^4\varphi\cdot\sin\varphi - 10\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$$

weil $\cos^0\varphi = 1$ ist (siehe Erkl. 22).

$$\text{b)}\quad \sin 6\varphi = 6\cdot\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi - \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\cos\varphi\cdot\sin^5\varphi$$

oder:

$$= 6\cdot\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi - 20\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi + 6\cdot\cos\varphi\cdot\sin^5\varphi$$

Aufgabe 82. Es ist:

a) $\sin 5\varphi$

b) $\cos 6\varphi$

nach den in der Auflösung voriger Aufgabe entwickelten Formeln zu berechnen für $\varphi = 25^0$.

Auflösung.

a) Da:

$$\sin 5\varphi = 5\cdot\cos^4\varphi\cdot\sin\varphi - 10\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$$

ist, so gibt:

$$\sin 5\cdot25^0 \text{ oder } \sin 125^0 = 5\cdot\cos^4 25^0\cdot\sin 25^0 - 10\cdot\cos^2 25^0\cdot\sin^3 25^0 + \sin^5 25^0$$

oder:

$$= 5\cdot0{,}90631^4\cdot0{,}42262 - 10\cdot0{,}90631^2\cdot0{,}42262^3 + 0{,}42262^5$$

oder (nach Erkl. 206):

$$\sin 125^0 = 0{,}81923$$

---

b) Da:

$$\sin 6\varphi = 6\cdot\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi - 20\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi + 6\cdot\cos\varphi\cdot\sin^5\varphi$$

ist, so erhält man für:

$$\sin 6\cdot25^0 \text{ oder } \sin 150^0 = 6\cdot\cos^5 25^0\cdot\sin 25^0 - 20\cdot\cos^3 25\cdot\sin^3 25^0 + 6\cdot\cos 25^0\cdot\sin^5 25^0$$

oder:

$$= 6\cdot0{,}90631^5\cdot0{,}42262 - 20\cdot0{,}90631^3\cdot0{,}42262^3 + 6\cdot0{,}90631\cdot0{,}42262^5$$

oder (nach Erkl. 207):

$$\sin 150^0 = 0{,}5$$

Erkl. 205. Es ist:

$$\sin 125^0 = \sin(180^0 - 125^0) = \sin 55^0 = 0{,}81915$$

und

$$\sin 150^0 = \sin 30^0 = 0{,}5$$

Erkl. 206.

$$\log(5\cdot0{,}90631^4\cdot0{,}42262) = \log 5 + 4\cdot\log 0{,}90631 + \log 0{,}42262$$

$$\begin{array}{rl} \log 5 = & 0{,}69897 \\ 4\log 0{,}90631 = & 0{,}82912 - 1 \\ \log 0{,}42262 = & 0{,}62595 - 1 \\ \hline & 2{,}15404 - 2 \end{array} \quad \left.\right\} \log 0{,}90631 = 0{,}95728 - 1$$

$2{,}15404 - 2$ oder $= 0{,}15404$

$$\text{numlog}\, 0{,}15404 = 1{,}42574$$

$$\log(10\cdot0{,}90631^2\cdot0{,}42262^3) = \log 10 + 2\cdot\log 0{,}90631 + 3\cdot\log 0{,}42262$$

$$\begin{array}{rl} \log 10 = & 1{,}00000 \\ 2\log 0{,}90631 = & 0{,}91456 - 1 \\ 3\log 0{,}42262 = & 0{,}87785 - 2 \\ \hline & 2{,}79241 - 3 \end{array}$$

$2{,}79241 - 3$ oder $= 0{,}79241 - 1$

$$\text{numlog}\, 0{,}79241 - 1 = 0{,}62003$$

$$\log(0{,}42262)^5 = 5\cdot\log 0{,}42262 = 0{,}12975 - 2$$

$$\text{numlog}\, 0{,}12975 - 2 = 0{,}01348$$

Demnach gibt:

$$\sin 125^0 = (1{,}42574 + 0{,}01348) - 0{,}62003 = 0{,}81919$$

Erkl. 206a. Die vorstehende logarithmische Berechnung von Produkten und Potenzen beruht auf folgenden Sätzen der Logarithmenrechnung:

„Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.“

„Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Grundzahl, multipliziert mit dem Exponenten."

Erkl. 207.

$\log(6 \cdot 0{,}90631^5 \cdot 0{,}42262) = \log 6 + 5 \log 0{,}90631 + \log 0{,}42262$

$\log 6 = 0{,}77815$
$5 \log 0{,}90631 = 4{,}78640 - 5$
$\log 0{,}42262 = 0{,}62595 - 1$
$6{,}19050 - 6$ oder $= 0{,}19050$

$\text{numlog}\, 0{,}19050 = 1{,}55063$

$\log(20 \cdot 0{,}90631^3 \cdot 0{,}42262^3) = \log 20 + 3 \log 0{,}90631 + 3 \log 0{,}42262$

$\log 20 = 1{,}30103$
$3 \log 0{,}90631 = 2{,}87184 - 3$
$3 \log 0{,}42262 = 1{,}87785 - 3$
$6{,}05072 - 6$ oder $= 0{,}05072$

$\text{numlog}\, 0{,}05072 = 1{,}12387$

$\log(6 \cdot 0{,}90631 \cdot 0{,}42262^5) = \log 6 + \log 0{,}90631 + 5 \log 0{,}42262$

$\log 6 = 0{,}77815$
$\log 0{,}90631 = 0{,}95728 - 1$
$5 \log 0{,}42262 = 3{,}12975 - 5$
$4{,}86518 - 6$ oder $= 0{,}86518 - 2$

$\text{numlog}\, 0{,}86518 - 2 = 0{,}07331$

Folglich ist:

$\sin 150^0 = (1{,}55063 - 1{,}12387) + 0{,}07331 = 0{,}5$

Aufgabe 83. Es ist:

a) $\cos 3\varphi$

b) $\cos 4\varphi$

durch Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ auszudrücken.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 92 ist:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - \cdots$$

Demnach erhält man:

a) für $n = 3$:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

b) für $n = 4$:

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^0\varphi\cdot\sin^4\varphi$$
$$= \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$$

weil $\cos^0\varphi = 1$ (nach Erkl. 22) ist.

Aufgabe 84. Es ist:

a) $\cos 3\varphi$

b) $\cos 4\varphi$

nach den in der Auflösung voriger Aufgabe entwickelten Formeln für $\varphi = 15^0$ zu berechnen.

Erkl. 208. Es ist:

$\cos 45^0 = 0{,}70711$

und $\cos 60^0 = 0{,}5$

Auflösung.

a) Da:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

ist, so erhält man für:

$\cos 3\cdot 15^0$ oder $\cos 45^0 =$
$\cos^3 15^0 - 3\cdot\cos 15^0\cdot\sin^2 15^0$

oder: $= 0{,}96593^3 - 3\cdot 0{,}96593\cdot 0{,}25882^2$

oder: $= 0{,}70715$ (siehe Erkl. 209)

Erkl. 209.

$\log 0{,}96593^3 = 3\cdot\log 0{,}96593 = 2{,}95485 - 3$

oder: $= 0{,}95485 - 1$

$\text{numlog}\, 0{,}95485 - 1 = 0{,}90126$

$\log(3\cdot 0{,}96593\cdot 0{,}25882^2) = \log 3 + \log 0{,}96593 + 2\log 0{,}25882$

$\log 3 = 0{,}47712$

$\log 0{,}96593 = 0{,}98495 - 1$

$2\log 0{,}25882 = 0{,}82598 - 2$

$2{,}28805 - 3$ oder $= 0{,}28805 - 1$

$\text{numlog}\, 0{,}28805 - 1 = 0{,}19411$

folglich ist:

$\cos 45^0 = 0{,}90126 - 0{,}19411 = 0{,}70715$

Erkl. 210.

$\log 0{,}96593^4 = 4\log 0{,}96593 = 4\cdot(0{,}98495 - 1) = 0{,}93980 - 1$

$\text{numlog}\, 0{,}93980 - 1 = 0{,}87056$

$\log(6\cdot 0{,}96593^2\cdot 0{,}25882^2) = \log 6 + 2\cdot\log 0{,}96593 + 2\log 0{,}25882$

$\log 6 = 0{,}77815$

$2\log 0{,}96593 = 1{,}96990 - 2$

$2\log 0{,}25882 = 0{,}82598 - 2$

$3{,}57403 - 4$ oder $= 0{,}57403 - 1$

$\text{numlog}\, 0{,}57403 - 1 = 0{,}3750$

$\log 0{,}25882^4 = 4\cdot\log 0{,}25882 = 1{,}65196 - 4 = 0{,}65196 - 3$

$\text{numlog}\, 0{,}65196 - 3 = 0{,}004487$

Demnach gibt:

$\cos 60^0 = (0{,}87056 + 0{,}004487) - 0{,}3750 = 0{,}5$

b) Da:

$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$

so gibt:

$\cos 4\cdot 15^0$ oder $\cos 60^0 =$
$0{,}96593^4 - 6\cdot 0{,}96592^2\cdot 0{,}25882^2 + 0{,}25882^4$

oder (nach Erkl. 208 bezw. 210):

$\cos 60^0 = 0{,}5$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 85. Es ist:

a) $\sin 3\varphi$
b) $\sin 4\varphi$
c) $\cos 5\varphi$
d) $\cos 6\varphi$

durch Potenzen von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ auszudrücken.

Andeutung. Auflösung analog den Auflösungen der Aufgaben 81 und 83.

Aufgabe 86. Es ist:

a) $\sin 3\varphi$
b) $\sin 4\varphi$

für $\varphi = 20^0$,

c) $\cos 5\varphi$
d) $\cos 6\varphi$

für $\varphi = 55^0$

nach den sich aus der Auflösung der Aufgabe 85 ergebenden Formeln zu berechnen.

Andeutung. Auflösung analog den Auflösungen der Aufgaben 82 und 84.

F. Ueber die Exponentialreihe und einige Anwendungen derselben auf die vorliegenden Probleme.

Anmerkung 13. Vorausgesetzt werden Kenntnisse vom binomischen Lehrsatze, von der Logarithmenrechnung und der Goniometrie.

a) Ueber die Exponentialreihe im allgemeinen.

Frage 94. Was versteht man unter der Exponentialreihe? Wie wird dieselbe entwickelt?

Antwort. Nach dem binomischen Lehrsatze (siehe Erkl. 79) gibt:

$$(a+b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \cdots$$

Setzt man in diese Gleichung 1 statt a und $\frac{x}{n}$ statt b, worin x irgend eine ganze oder gebrochene, reelle Zahl bedeute, so erhält man:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1^n + n \cdot 1^{n-1} \cdot \frac{x}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 1^{n-2} \cdot \frac{x^2}{n^2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1^{n-3} \cdot \frac{x^3}{n^3} + \cdots$$

oder, da:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{n^2} = \frac{n^2 - n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

und

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{n^3} = \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{n^3} = 1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots$$

gibt:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Ist die Anzahl der Glieder der vorstehenden Reihe unendlich gross, ist also $n = \infty$, so ist:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{\infty} = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

und man erhält:

$$1 - \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$$

$$1 - \frac{2}{n} = 1 - 0 = 1 \quad \text{u. s. w.}$$

oder für:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

Wird 1 statt x gesetzt, so ergibt sich:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

Berechnet man die rechte Seite dieser Gleichung, so erhält man einen unendlichen Dezimalbruch, dessen erste 6 Ziffern:

2,71828

Erkl. 211. Mittelst der für e^x entwickelten unendlichen Reihe können beliebige Potenzen oder Wurzeln von $e = 2{,}71828 \cdots$ berechnet werden, weil x jede beliebige, positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein kann.

Diese Reihe führt den Namen „Exponentialreihe".

sind. Dieser Dezimalbruch wird in der mathematischen Wissenschaft mit e bezeichnet. Es ist also:

$$e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

und

$$e^x = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

ferner:

$$e^{-x} = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = 1-x+\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

(siehe Erkl. 211)

Frage 95. Was erhält man für:

e^{ix} und e^{-ix}?

Antwort. Da nach vorstehender Antwort:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

ist, so gibt:

$$e^{ix} = 1+ix+\frac{i^2x^2}{1\cdot 2}+\frac{i^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{i^4x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

oder, weil:

$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = 1 \text{ u. s. w.}$$

ist (siehe Antwort auf Frage 5):

$$e^{ix} = 1+ix-\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{ix^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots$$

oder:

$$= \left(1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\right) + i\cdot\left(x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots\right)$$

Ebenso erhält man für:

$$e^{-ix} = \left(1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\right) - i\cdot\left(x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots\right)$$

Nun kann man für:

$$\left(1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\right) = \cos x$$

und für:

$$\left(x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots\right) = \sin x$$

setzen, weil diese beiden Klammerausdrücke sämtliche Eigenschaften von $\cos x$ bezw. $\sin x$ besitzen, was immer auch für x eingesetzt werden möge (siehe Erkl. 212).

Erkl. 212. Ist $x = 0$, so ergibt sich:

$$\cos 0^0 = 1-\frac{0}{1\cdot 2}+\frac{0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots = 1$$

$$\sin 0^0 = 0-\frac{0}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots = 0$$

Setzt man für $x = -x$, so folgt:

$$\cos(-x) = 1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots = \cos x$$

$$\sin(-x) = -x+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots = -\sin x \text{ (vergl. Erkl. 141)}$$

Ferner gibt:

$$e^{ix}\cdot e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^0 = 1 \text{ (nach Erkl. 24)}$$

und

$$(\cos x + i\sin x)\cdot(\cos x - i\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

Da:

$$e^{ix}\cdot e^{-ix} = \cos^2 x + \sin^2 x$$

ist, so muss:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

sein, was (nach Erkl. 130) richtig ist.

Erkl. 213. Die Gleichungen:

$$1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots = \cos x$$

und

$$x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots = \sin x$$

sind zuerst von Newton (geb. 1643, gest. 1727) entwickelt worden. Euler (geb. 1707, gest. 1783) hat diese aus den Werten von $\cos xy$ und $\sin xy$ abgeleitet.

(Siehe Baltzer, Elemente der Mathematik I, Seite 183, Anm.)

Demnach ist:

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

und

$$e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x \quad \text{(vgl. Erkl. 214)}$$

Erkl. 214. In e^{ix} bedeutet x einen, mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen und durch Teile desselben dargestellten Kreisbogen, während x in $\cos x + i \sin x$ den Winkel bedeutet, welcher zu jenem Bogen gehört.

Setzt man für $x = 2k\pi$ ein, so erhält man:

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$$

oder, weil:

$$\cos 2k\pi = 1$$

und

$$\sin 2k\pi = 0$$

ist, wenn k eine positive Ganzzahl (einschliesslich 0) bedeutet (siehe Erkl. 162 und Antwort auf Frage 82):

$$e^{2k\pi i} = 1$$

Erkl. 215. Aus der Exponentialreihe lässt sich ein neuer Beweis des Moivreschen Satzes (siehe Erkl. 156) herleiten.

Da:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ist, so ist auch:

$$e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$$

oder allgemein:

$$e^{nix} = \cos nx + i \sin nx$$

Ist $x = (2k+1)\pi$, so ergibt sich:

$$e^{(2k+1)\pi} = \cos(2k+1)\pi + i \sin(2k+1)\pi$$

oder, weil:

$$\cos(2k+1)\pi = -1$$

und

$$\sin(2k+1)\pi = 0$$

ist (nach Antwort auf Frage 82):

$$e^{(2k+1)\pi} = -1$$

---

b) Ueber die Berechnung von i^i.

Frage 96. Was erhält man für:

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}?$$

Erkl. 216. Die Lösung des Problems i^i stammt von Euler.

Antwort. Setzt man in die Gleichung:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$\frac{\pi}{2}$ statt x ein, so erhält man:

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = \cos 90^0 + i \sin 90^0 = 0 + i = +i$$

Demnach ist:

$$e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)^i} = i^i$$

Nun gibt:

$$\left(\frac{i\pi}{2}\right) \cdot i = \frac{i^2\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

folglich ist:

$$i^i \text{ oder } \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \text{ oder } = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

(vergl. Erkl. 216)

---

c) Ueber die Darstellung von $l(a+bi)$.

Frage 97. Wie lässt sich:

$$l(a+bi)$$

bilden?

Antwort. Da:

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

(nach Antwort auf Frage 95)

und

$$a + bi = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

(nach Antwort auf Frage 57)

ist, so gibt:

$$a + bi = r \cdot e^{\varphi i}$$

und

$$l\,(a + bi) = l\,(r \cdot e^{\varphi i})$$

oder:

$$= lr + \varphi i le \quad \text{(n. Erkl. 206a)}$$

oder, weil $le = 1$ ist (nach Erkl. 218):

$$l\,(a + bi) = lr + \varphi i$$

Hierin bedeutet:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(nach Antw. auf Frage 55)}$$

und φ einen, mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Kreisbogen, dessen Tangente $= \frac{b}{a}$ ist (siehe Erkl. 98 und 98a), also:

$$\varphi = \operatorname{arc} \cdot \operatorname{tg} \frac{b}{a}$$

Man erhält demnach:

$$l\,(a + bi) = l \cdot \sqrt[2]{a^2 + b^2} + i \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a}$$

oder endlich, weil:

$$l \sqrt[2]{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} \cdot l\,(a^2 + b^2)$$

ist (nach Erkl. 219):

$$l\,(a + bi) = \frac{1}{2}\, l\,(a^2 + b^2) + i \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a}$$

Erkl. 217. Die auf die Basis $e = 2{,}71828 \cdots$ bezogenen Logarithmen heissen natürliche oder nach ihrem Erfinder Napier (1614) die Napierschen; alle Logarithmen, welche eine andere Basis besitzen (z. B. die Basis 10), nennt man künstliche. Die natürlichen Logarithmen bezeichnet man mit log nat (logarithmus naturalis, d. h. natürlicher Logarithmus) oder kurz mit l. Die auf die Basis 10 bezogenen Logarithmen heissen gemeine oder nach ihrem Erfinder Briggs (geb. 1556, gest. 1630) die Briggschen Logarithmen. Man bezeichnet sie einfach mit log (siehe die Erkl. 206, 207, 209 und 210). Die natürlichen Logarithmen werden hauptsächlich in der höheren, die gemeinen in der niederen Mathematik benutzt.

Erkl. 218. Ein Satz aus der Logarithmenrechnung lautet:

„Der Logarithmus der Basis ist gleich 1."

Erkl. 219. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radikandus, geteilt durch den Wurzelexponenten.

---

d) Ueber die Darstellung von $\cos^n\varphi$ und $\sin^n\varphi$ durch Exponentialreihen.

Frage 98. Wie lässt sich:

$$\cos^n\varphi$$

durch Exponentialreihen darstellen?

Antwort. Aus den Gleichungen:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

und

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \sin\varphi$$

folgt:

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi$$
$$= 2\cos\varphi$$

Demnach ist:

$$2^n \cdot \cos^n\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^n$$

oder nach dem binomischen Lehrsatze:

$$2^n \cdot \cos^n\varphi = e^{ni\varphi} + n \cdot e^{(n-1)i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot e^{(n-2)i\varphi} \cdot e^{-2i\varphi} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot e^{(n-3)i\varphi} \cdot e^{-3i\varphi} + \cdots + n \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{-(n-1)i\varphi} + e^{-ni\varphi}$$

oder (nach Erkl. 220):

Erkl. 220. Man erhält für:

$$e^{(n-1)i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} = e^{(n-1)i\varphi - i\varphi} \quad \text{(nach Erkl. 23)}$$

oder:

$$= e^{ni\varphi - i\varphi - i\varphi} = e^{ni\varphi - 2i\varphi} = e^{(n-2)i\varphi}$$

(nach Erkl. 26)

ferner für:

$$e^{(n-2)i\varphi} + e^{-2i\varphi} = e^{(n-2)i\varphi - 2i\varphi} = e^{ni\varphi - 2i\varphi - 2i\varphi} = e^{ni\varphi - 4i\varphi} = e^{(n-4)i\varphi}$$

und so fort.

$$2^n \cdot \cos^n\varphi = e^{ni\varphi} + n e^{(n-2)i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-4)i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-6)i\varphi} + \ldots + n\cdot e^{-(n-2)i\varphi} + e^{-ni\varphi}$$

oder, indem man das erste und letzte. zweite und vorletzte Glied u. s. w. zusammenfasst und die ganze Gleichung durch 2^n teilt:

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}) + n\cdot(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot (e^{(n-4)i\varphi} + e^{-(n-4)i\varphi}) + \ldots\right]$$ (siehe Frage 100)

Frage 99. Wie lässt sich:

$\sin^n\varphi$

durch Exponentialreihen darstellen?

Antwort. Aus den Gleichungen:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

und

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

folgt:

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi - \cos\varphi + i\sin\varphi = 2i\sin\varphi$$

Demnach ist:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n\varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})^n$$

oder nach dem binomischen Lehrsatze:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n\varphi = e^{ni\varphi} - n\cdot e^{(n-1)i\varphi}\cdot e^{-i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-2)i\varphi}\cdot e^{-2i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-3)i\varphi}\cdot e^{-3i\varphi} - \ldots \mp n\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{-(n-1)i\varphi} \pm e^{-ni\varphi}$$

Ist n eine gerade Zahl, so ist $e^{-ni\varphi}$ positiv, also $n\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{-(n-1)i\varphi}$ negativ (siehe Erkl. 202) und man erhält demnach mit Bezug auf Erkl. 220

bei geradem n

für:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n\varphi = e^{ni\varphi} - n\cdot e^{(n-2)i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-4)i\varphi} - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-6)i\varphi} - \ldots - n\cdot e^{-(n-2)i\varphi} + e^{-ni\varphi}.$$

oder, indem man die ganze Gleichung durch $2^n \cdot i^n$ teilt:

$$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}) - n\cdot(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot (e^{(n-4)i\varphi} + e^{-(n-4)i\varphi}) - \ldots\right]$$

Ist n eine ungerade Zahl, so ist das letzte Glied der Reihe negativ. das vorletzte positiv (nach Erkl. 202) und es gibt hiernach

bei ungeradem n:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n\varphi = e^{ni\varphi} - n\cdot e^{(n-2)i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-4)i\varphi} - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-6)i\varphi} - \ldots + n\cdot e^{-(n-2)i\varphi} - e^{-ni\varphi}$$

oder endlich:

$$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi} - e^{-ni\varphi}) - n\cdot(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot (e^{(n-4)i\varphi} - e^{-(n-4)i\varphi}) - \ldots\right]$$

Frage 100. Wie lassen sich die in den Antworten auf die Fragen 98 und 99 abgeleiteten Formeln für:

$$\cos^n\varphi \text{ und } \sin^n\varphi$$

vereinfachen?

Erkl. 221. Wie aus nebenstehender Antwort ersichtlich ist, lassen sich mit Hilfe der Exponentialreihe genau dieselben Formeln für $\sin^n\varphi$ und $\cos^n\varphi$ ableiten, welche in den Antworten auf die Fragen 90 und 91 auf einem anderen Wege entwickelt wurden.

Antwort. Da nach der Antwort auf Frage 99:

$$e^{ni\varphi}+e^{-ni\varphi}=2\cos n\varphi$$

also auch:

$$e^{(n-2)i\varphi}+e^{-(n-2)i\varphi}=2\cdot\cos(n-2)\varphi$$

und

$$e^{(n-4)i\varphi}+e^{-(n-4)i\varphi}=2\cdot\cos(n-4)\varphi$$

u. s. w.

ist, so erhält man für:

$$\cos^n\varphi=\frac{1}{2^n}\cdot\Big[(e^{ni\varphi}+e^{-ni\varphi})+n\cdot(e^{(n-2)i\varphi}+e^{-(n-2)i\varphi})+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot(e^{(n-4)i\varphi}+e^{-(n-4)i\varphi})+\cdots\Big]$$

$$\cos^n\varphi=\frac{1}{2^n}\cdot\Big[2\cos n\varphi+2n\cos(n-2)\varphi+\frac{2n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi+\cdots\Big]$$

oder, da sämtliche Glieder der eckigen Klammern den Faktor 2 besitzen, welchen man vor die Klammer setzen und gegen 2^n im Nenner fortheben kann:

$$\cos^n\varphi=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\Big[\cos n\varphi+n\cdot\cos(n-2)\varphi+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi+\cdots\Big]$$

(vergl. Erkl. 221)

Ferner ergibt sich

bei geradem n

für:

$$\sin^n\varphi=\frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\Big[(e^{ni\varphi}+e^{-ni\varphi})-n\cdot(e^{(n-2)i\varphi}+e^{-(n-2)i\varphi})+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot(e^{(n-4)i\varphi}+e^{-(n-4)i\varphi})-\cdots\Big]$$

$$\sin^n\varphi=\frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\Big[2\cos n\varphi-2n\cos(n-2)\varphi+\frac{2n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi-\cdots\Big]$$

oder, weil:

$$i^n=i^{2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)}=(-1)^{\frac{n}{2}}$$

ist und sich der Faktor 2 sämtlicher Glieder der eckigen Klammer gegen 2^n im Nenner forthebt:

$$\sin^n\varphi=\frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}}\cdot\Big[\cos n\varphi-n\cdot\cos(n-2)\varphi+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi-\cdots\Big]$$

Endlich erhält man, weil:

$$e^{ni\varphi}-e^{-ni\varphi}=2i\sin n\varphi$$

also auch:

$$e^{(n-2)i\varphi}-e^{-(n-2)i\varphi}=2i\sin(n-2)\varphi$$

und

$$e^{(n-4)i\varphi}-e^{-(n-4)i\varphi}=2i\sin(n-4)\varphi$$

u. s. w.

ist (nach der Antwort auf Frage 99)

bei ungeradem n

für:

$$\sin^n\varphi=\frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\Big[2i\sin n\varphi-2ni\sin(n-2)\varphi+\frac{2\cdot n\cdot(n-1)}{1\cdot2}i\sin(n-4)\varphi-\cdots\Big]$$

oder, weil sich die Faktoren 2 und i sämtlicher Glieder der Klammer gegen 2^n bezw. i^n im Nenner fortheben und

$$i^{n-1} = i^{2\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

ist:

$$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \left[\sin n\varphi - n\cdot\sin(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\sin(n-4)\varphi - \cdots\right]$$

(vergl. Erkl. 221)

Anhang.

A. Verzeichnis der Resultate der ungelösten Aufgaben.

1) Imaginäre Zahlen.

Aufgabe 3. $\sqrt[2]{-121} = \pm 11i$; reeller Faktor rational

Aufgabe 4. $\sqrt[2]{-5} = \pm 2{,}236\cdots i$; reeller Faktor irrational

Aufgabe 6. a) $+1$, b) $+i$, c) -1, d) $-i$, e) $+1$, f) $-i$, g) -1, h) $+i$

Aufgabe 8. a) $-2i$, b) $-\frac{194x^2yi}{117z^2}$, c) $+59i\sqrt{5}$, d) $-\frac{ai}{3b}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$, e) $+5i\sqrt{7}$, f) $+\frac{i}{x}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}$

Aufgabe 10. a) $+a^3$, b) $-\frac{x^4y^2}{z^2}$, c) $-10i$, d) $-6\cdot\left(3\sqrt{2}-4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, e) $y^2(z-x)$, f) $2\cdot(3\sqrt{10}-8)$, g) $+6$, h) $-(616{,}5+822\cdot\sqrt{2})i = 545{,}808\,i$

Aufgabe 13. a) -24, b) $+\frac{y}{x}i\sqrt{z}$, c) $-2{,}7$, d) $2\frac{1}{4}(1+i)$, e) $+3i$, f) $-3\frac{3}{20}+1\frac{1}{2}i$

Aufgabe 16. a) 64, b) $64i\sqrt{2}$, c) -128, d) $-128i\sqrt{2}$, e) $\frac{1}{36}$, f) $-\frac{i}{36\cdot\sqrt{6}}$, g) $-\frac{1}{216}$, h) $+\frac{i}{216\cdot\sqrt{6}}$

Aufgabe 17. a) $+\frac{a^2b}{c}$, b) $-32i\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}$, c) $-a^{10}b^{10}\sqrt{ab}$, d) $-60\frac{3}{4}$, e) $+\frac{20}{2187}$

---

2) Komplexe Zahlen.

Aufgabe 19. a) $+5-33i$, b) $1+i$, c) 0; d) $+3{,}8i$, e) $-18+4\frac{3}{4}i$, f) $+24-57i$, g) $+\frac{14x}{y^2z^3}$

Aufgabe 23. a) $0{,}06i-0{,}03 = 0{,}03(2i-1)$, b) $8-i$, c) 25, d) $\frac{8}{9}$,
e) $x\cdot(1-\sqrt{y}+y)+yi\sqrt{x}$, f) $a^2-b^2+c^2-2bci$,
g) $-41+i\left(30-42-28\sqrt{\frac{3}{2}}+30\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -41-22{,}82i = -(41+22{,}82\,i)$
h) $+\frac{4}{3}$

Aufgabe 24. Norm $= +225$, Modulus $= +15$

Aufgabe 25. Norm $= +2025$, Modulus $= +45$

Aufgabe 28. a) $-\frac{1}{29}\cdot(19+4i)$, b) $+\frac{1}{11}\cdot(5-4i\sqrt{6})$, c) $0{,}2299-0{,}9974i$, d) $+2i$.
e) $+1$, f) $2\cdot(3+i\sqrt{3})$, g) $3\frac{9}{13}+5\frac{7}{13}i$, h) $0{,}0414-0{,}5423\,i$,
i) $0{,}1824\cdots+0{,}06289\cdots i$

Aufgabe 29. Norm $=\frac{81}{100}$, Modulus $=\frac{9}{10}$

Aufgabe 35. a) $-164+8360i$, b) $8\cdot(1-i)$, c) $\frac{666-418i}{614125}$,
d) $-465-531i=-3\cdot(155+177i)$

Aufgabe 36. $+48i$

Aufgabe 37. Die erste Potenz gibt: $2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}-3\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}}$, die zweite: $-1\frac{2}{3}-4i$,

die dritte: $-\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\left(15\frac{1}{3}+3i\right)$, die vierte: $-13\frac{2}{9}+13\frac{1}{3}i$,

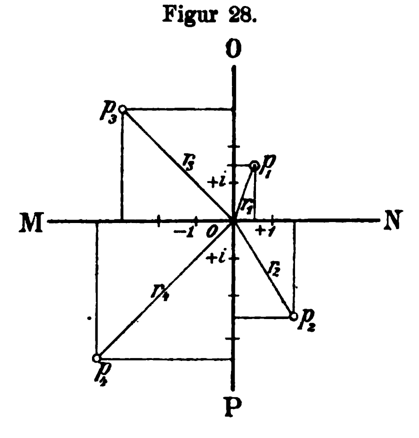
die fünfte: $+\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\left(13\frac{5}{9}+66\frac{1}{3}i\right)$

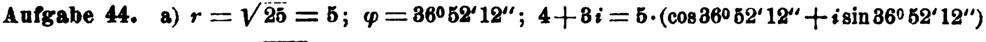
Aufgabe 40. a) $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(3+i)$, b) $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(1-5i)$, c) $\pm\sqrt{\frac{11}{2}}\cdot(1+i)$,
d) $2(1-\sqrt{6})+i(4+\sqrt{6})=-2{,}898\cdots+6{,}449\cdots i$, e) $\frac{43-19i}{26}$,
f) $\frac{5x}{z}\cdot\sqrt{r}-2xi\cdot\sqrt{\frac{y}{r}}$, g) $\pm2\cdot\sqrt{\frac{2+\sqrt{68}}{2}}=\pm2\cdot\sqrt{1+\sqrt{17}}$

3) Graphische und trigonometrische Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen.

Aufgabe 42. a) Der Modulus ist:
$r_1=\sqrt{0{,}5^2+1{,}5^2}=\sqrt{2{,}5}=1{,}58\cdots$
der die Komplexe darstellende Punkt ist p_1 (Figur 28).
b) Der Modulus ist:
$r_2=\sqrt{1{,}5^2+2{,}5^2}=\sqrt{8{,}5}=2{,}9\cdots$
der die Komplexe darstellende Punkt ist p_2.
c) $r_3=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=4{,}24\cdots$
der Punkt von $-3+\sqrt{-9}$ ist p_3.
d) $r_4=\sqrt{3{,}5^2+3{,}5^2}=\sqrt{24{,}5}=4{,}949\cdots$
der Punkt von:
$+i\cdot\sqrt{-12{,}25}-\sqrt{-12{,}25}$
ist p_4.

Figur 28.





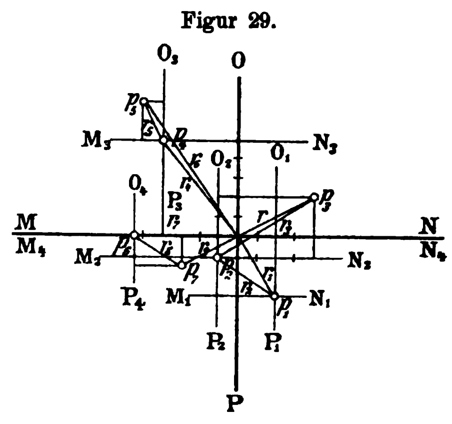
Aufgabe 44. a) $r=\sqrt{25}=5$; $\varphi=36^0 52'12''$; $4+3i=5\cdot(\cos 36^0 52'12''+i\sin 36^0 52'12'')$
b) $r=\sqrt{1754}=$ rund 48; $\varphi=180^0-33^0 18'38''=146^0 41'22''$;
$-35+23i=48\cdot(\cos 146^0 41'22''+i\cdot\sin 146^0 41'22'')$
c) $r=\sqrt{324}=18$; $\varphi=360^0-39^0 31'10''=320^0 28'50''$;
$13-\sqrt{-155}=18\cdot(\cos 320^0 28'50''+i\sin 320^0 28'50'')$
d) $r=\sqrt{121}=11$; $\varphi=180^0+65^0 22'42''=245^0 22'42''$;
$-\sqrt{21}-10i=11\cdot(\cos 245^0 22'42''+i\sin 245^0 22'42'')$

4) Das graphische und trigonometrische Rechnen mit imaginären und komplexen Zahlen.

Aufgabe 48. Der die komplexe Zahl $+2-3i$ darstellende Punkt ist p_1, der von $-3+2i$: p_2, der von $+5+3i$: p_3, der von der Summe dieser Komplexen: p_8 (Figur 29).

$$2-3i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$= 3{,}6056\cdot(\cos 303^0 41' 23'' + i\sin 303^0 41' 23'')$$
oder:
$$= 3{,}6056\cdot(\cos 56^0 18' 37'' - i\sin 56^0 18' 37'')$$
$$-3+2i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$
$$= 3{,}6056\cdot(\cos 146^0 18' 36'' + i\sin 146^0 18' 36'')$$
oder:
$$= 3{,}6056\cdot(-\cos 33^0 41' 24'' + i\sin 33^0 41' 24'')$$
$$+5+3i = r_3\cdot(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$$
$$= 5{,}831\cdot(\cos 30^0 57' 51'' + i\sin 30^0 57' 51'')$$
$$(+2-3i)+(-3+2i)+(+5+3i)$$
$$= +4+2i = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$= 4{,}4721\cdot(\cos 26^0 33' 54'' + i\sin 26^0 33' 54'')$$

Figur 29.



Aufgabe 49. (Figur 29.) Der die komplexe Zahl $-4+5i$ darstellende Punkt ist p_4 (bezogen auf $MNOP$); der Punkt von $-(+1-2i)$ oder $-1+2i$ ist p_5 (bezogen auf $M_3N_3O_3P_3$); der Punkt der Differenz ist p_6 (bezogen auf $MNOP$).

$$-4+5i = r_4\cdot(\cos\varphi_4 + i\sin\varphi_4) = 6{,}403\cdot(\cos 128^0 39' 36'' + i\sin 128^0 39' 36'')$$
$$\text{oder } = 6{,}403\cdot(-\cos 51^0 20' 24'' + i\sin 51^0 20' 24'')$$
$$-(+1-2i) = -1+2i = r_5\cdot(\cos\varphi_5 + i\sin\varphi_5)$$
$$= 2{,}2361\cdot(\cos 116^0 33' 56'' + i\sin 116^0 33' 56'')$$
$$\text{oder } = 2{,}2361\cdot(-\cos 63^0 26' 4'' + i\sin 63^0 26' 4'')$$
$$(-4+5i)-(+1-2i) = r_6\cdot(\cos\varphi_6 + i\sin\varphi_6)$$
$$= 8{,}6023\cdot(\cos 125^0 32' 20'' + i\sin 125^0 32' 20'')$$
$$\text{oder } = 8{,}6023\cdot(-\cos 54^0 27' 40'' + i\sin 54^0 27' 40'')$$

Aufgabe 50. (Figur 29.) Der die reelle Zahl darstellende Punkt ist p_6 (bezogen auf $MNOP$), der von $-(-2{,}5+1{,}5i) = +2{,}5-1{,}5i$ ist p_7 (bezogen auf $M_4N_4O_4P_4$).

$$-5{,}5 = r_7\cdot(\cos\varphi_7 + i\sin\varphi_7) = 5{,}5\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)$$
$$= 5{,}5\cdot(-\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$
$$-(-2{,}5+1{,}5i) = +2{,}5-1{,}5i = r_8\cdot(\cos\varphi_8 + i\sin\varphi_8)$$
$$= 2{,}916\cdot(\cos 329^0 2' 9'' + i\sin 329^0 2' 9'')$$
$$\text{oder } = 2{,}916\cdot(\cos 30^0 57' 51'' + i\sin 30^0 57' 51'')$$
$$-5{,}5-(-2{,}5+1{,}5i) = -3-1{,}5i = r_9\cdot(\cos\varphi_9 + i\sin\varphi_9)$$
$$= 3{,}354\cdot(\cos 206^0 33' 54'' + i\sin 206^0 33' 54'')$$
$$\text{oder } = 3{,}354\cdot(\cos 26^0 33' 54'' - i\sin 26^0 33' 54'')$$

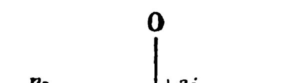
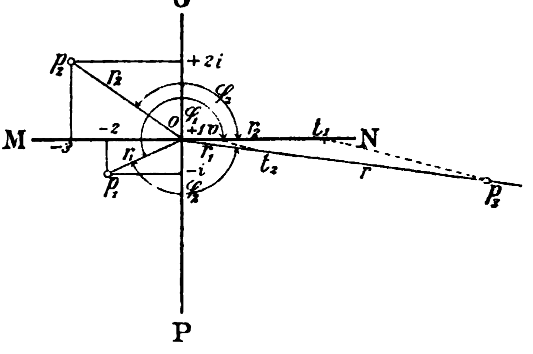
Aufgabe 54.

$$-2-i = 2{,}236\cdot(\cos 206^0 33' 54'' + i\sin 206^0 33' 54'')$$
dargestellt durch p_1 (Figur 30).

$$(-3+2i) = 3{,}6056\cdot(\cos 146^0 18' 36'' + i\sin 146^0 18' 36'')$$
dargestellt durch p_2.

$$(-2-i)\cdot(-3+2i) = 2{,}236\cdot 3{,}6056\cdot(\cos 352^0 52' 30'' + i\sin 352^0 52' 30'')$$
oder auch:
$$= 8{,}06\cdot(\cos 7^0 7' 30'' - i\cdot\sin 7^0 7' 30'')$$
dargestellt durch p_3.

Figur 30.

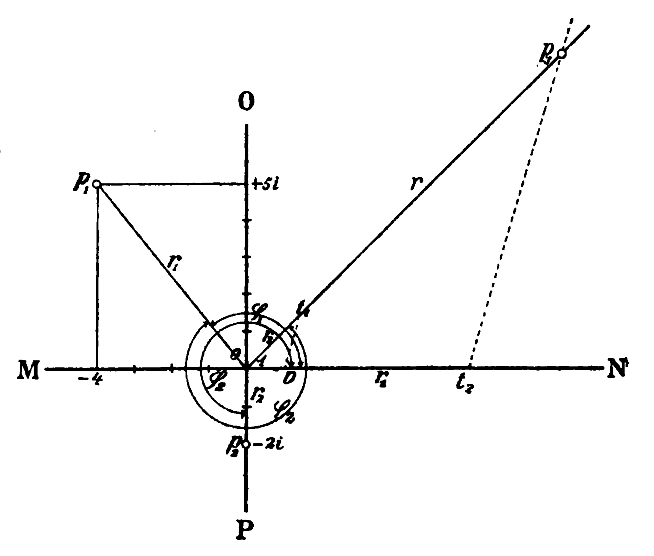

Aufgabe 55.

$-4+5i = 6{,}403\cdot$
$(\cos 128^0 39' 36'' + i \sin 128^0 39' 36'')$
dargestellt durch p_1 (Figur 31).

$-2i = 2\cdot(\cos 270^0 + i \sin 270^0)$
dargestellt durch p_2.

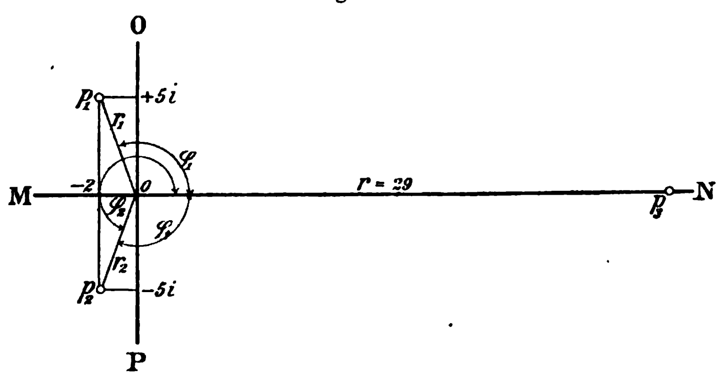
$(-4+5i)\cdot(-2i) = 12{,}806\cdot$
$(\cos 398^0 39' 36'' + i \sin 398^0 39' 36'')$
oder auch:
$= 12{,}806\cdot$
$(\cos 38^0 39' 36'' + i \sin 38^0 39'' 36'')$
dargestellt durch p_3.

Figur 31.



Aufgabe 56. $-2+5i = 5{,}385\cdot(\cos 111^0 48' 7'' + i \sin 111^0 48' 7'')$, dargestellt durch p_1 (Fig. 32).
$-2-5i = 5{,}385\cdot(\cos 248^0 11' 53'' + i \sin 248^0 11' 53'')$, dargestellt durch p_2,
$(-2+5i)\cdot(-2-5i) = 5{,}385^2\cdot(\cos 360^0 + i \sin 360^0)$
$= 29$, dargestellt durch p_3.

Figur 32.

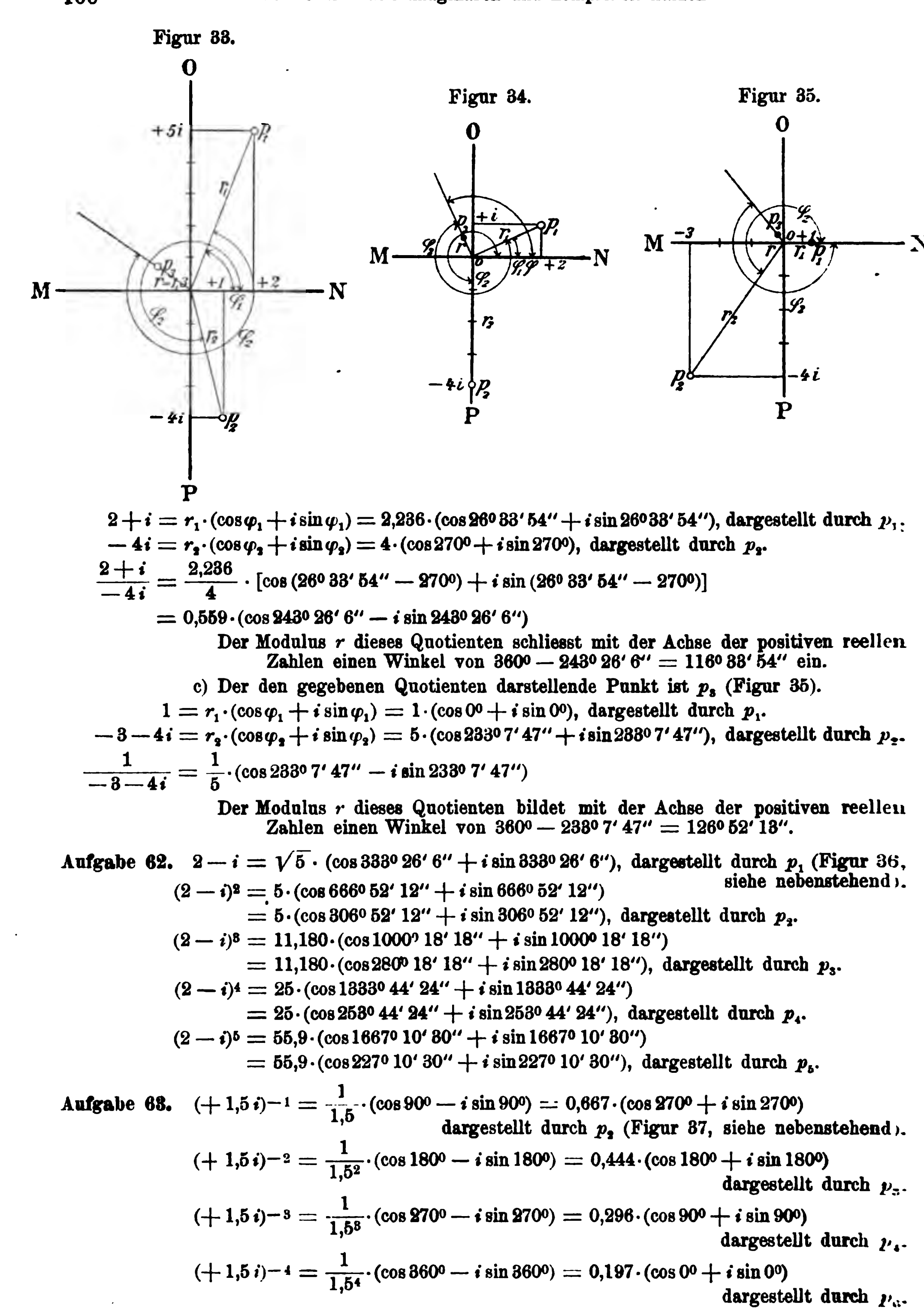


Aufgabe 58. a) Der den gegebenen Quotienten darstellende Punkt ist p_3 (Figur 33, siehe nächste Seite).

$$2+5i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = 5{,}385\cdot(\cos 68^0 11' 53'' + i \sin 68^0 11' 53'')$$
$$1-4i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = 4{,}123\cdot(\cos 284^0 2' 12'' + i \sin 284^0 2' 12'')$$
$$\frac{2+5i}{1-4i} = \frac{5{,}385}{4{,}123}\cdot[\cos(68^0 11' 53'' - 284^0 2' 12'') + i \sin(68^0 11' 53'' - 284^0 2' 12'')]$$
$$\text{oder} = 1{,}306\cdot(\cos 215^0 50' 19'' - i \sin 215^0 50' 19'')$$

Der Modulus r des Quotienten schliesst mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von $360^0 - 215^0 50' 19'' = 144^0 9' 41''$ ein.

b) Der den gegebenen Quotienten $\frac{+2+i}{-4i}$ darstellende Punkt ist p_3 (Figur 34, siehe nächste Seite).



Figur 33.

Figur 34.

Figur 35.

$2+i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = 2{,}236\cdot(\cos 26^0\,33'\,54'' + i\sin 26^0\,33'\,54'')$, dargestellt durch p_1;

$-4i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = 4\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$, dargestellt durch p_2.

$$\frac{2+i}{-4i} = \frac{2{,}236}{4}\cdot[\cos(26^0\,33'\,54'' - 270^0) + i\sin(26^0\,33'\,54'' - 270^0)]$$

$$= 0{,}559\cdot(\cos 243^0\,26'\,6'' - i\sin 243^0\,26'\,6'')$$

Der Modulus r dieses Quotienten schliesst mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von $360^0 - 243^0\,26'\,6'' = 116^0\,33'\,54''$ ein.

c) Der den gegebenen Quotienten darstellende Punkt ist p_3 (Figur 35).

$1 = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = 1\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)$, dargestellt durch p_1.

$-3-4i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = 5\cdot(\cos 233^0\,7'\,47'' + i\sin 233^0\,7'\,47'')$, dargestellt durch p_2.

$$\frac{1}{-3-4i} = \frac{1}{5}\cdot(\cos 233^0\,7'\,47'' - i\sin 233^0\,7'\,47'')$$

Der Modulus r dieses Quotienten bildet mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von $360^0 - 233^0\,7'\,47'' = 126^0\,52'\,13''$.

Aufgabe 62. $2 - i = \sqrt{5}\cdot(\cos 333^0\,26'\,6'' + i\sin 333^0\,26'\,6'')$, dargestellt durch p_1 (Figur 36, siehe nebenstehend).

$(2-i)^2 = 5\cdot(\cos 666^0\,52'\,12'' + i\sin 666^0\,52'\,12'')$

$= 5\cdot(\cos 306^0\,52'\,12'' + i\sin 306^0\,52'\,12'')$, dargestellt durch p_2.

$(2-i)^3 = 11{,}180\cdot(\cos 1000^0\,18'\,18'' + i\sin 1000^0\,18'\,18'')$

$= 11{,}180\cdot(\cos 280^0\,18'\,18'' + i\sin 280^0\,18'\,18'')$, dargestellt durch p_3.

$(2-i)^4 = 25\cdot(\cos 1333^0\,44'\,24'' + i\sin 1333^0\,44'\,24'')$

$= 25\cdot(\cos 253^0\,44'\,24'' + i\sin 253^0\,44'\,24'')$, dargestellt durch p_4.

$(2-i)^5 = 55{,}9\cdot(\cos 1667^0\,10'\,30'' + i\sin 1667^0\,10'\,30'')$

$= 55{,}9\cdot(\cos 227^0\,10'\,30'' + i\sin 227^0\,10'\,30'')$, dargestellt durch p_5.

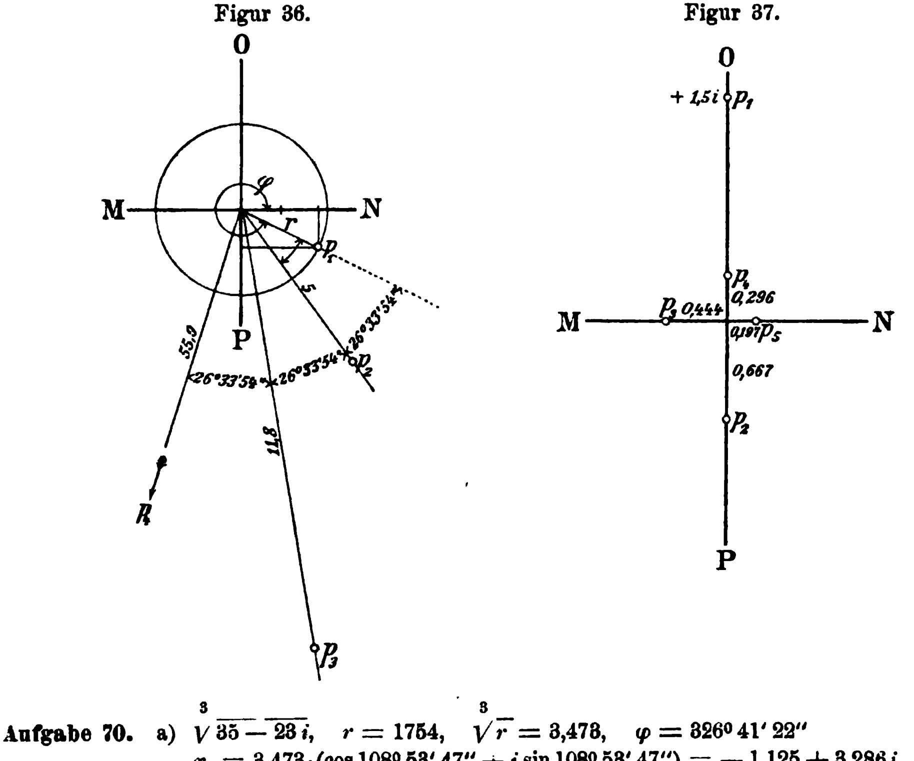
Aufgabe 63. $(+1{,}5i)^{-1} = \frac{1}{1{,}5}\cdot(\cos 90^0 - i\sin 90^0) = 0{,}667\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$ dargestellt durch p_2 (Figur 37, siehe nebenstehend).

$(+1{,}5i)^{-2} = \frac{1}{1{,}5^2}\cdot(\cos 180^0 - i\sin 180^0) = 0{,}444\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)$ dargestellt durch p_3.

$(+1{,}5i)^{-3} = \frac{1}{1{,}5^3}\cdot(\cos 270^0 - i\sin 270^0) = 0{,}296\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$ dargestellt durch p_4.

$(+1{,}5i)^{-4} = \frac{1}{1{,}5^4}\cdot(\cos 360^0 - i\sin 360^0) = 0{,}197\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)$ dargestellt durch p_5.

Figur 36. Figur 37.



Aufgabe 70. a) $\sqrt[3]{35 - 23i}$, $r = 1754$, $\sqrt[3]{r} = 3{,}473$, $\varphi = 326^0\,41'\,22''$

$x_1 = 3{,}473 \cdot (\cos 108^0\,53'\,47'' + i \sin 108^0\,53'\,47'') = -1{,}125 + 3{,}286\,i$

$x_2 = 3{,}473 \cdot (\cos 228^0\,53'\,47'' + i \sin 228^0\,53'\,47'') = -2{,}283 - 2{,}617\,i$

$x_3 = 3{,}473 \cdot (\cos 348^0\,53'\,47'' + i \sin 348^0\,53'\,47'') = 3{,}408 - 0{,}669\,i$

b) $\sqrt[4]{-15 + \sqrt{-31}}$ 1) Erste Lösung: $r = 16$, $\sqrt[4]{r} = 2$, $\varphi = 159^0\,38'\,9''$

$x_1 = 2 \cdot (\cos 39^0\,54'\,32'' + i \sin 39^0\,54'\,32'') = 1{,}53414 + 1{,}28314\,i$

$x_2 = 2 \cdot (\cos 129^0\,54'\,32'' + i \sin 129^0\,54'\,32'') = -1{,}28314 + 1{,}53414\,i$

$x_3 = 2 \cdot (\cos 219^0\,54'\,32'' + i \sin 219^0\,54'\,32'') = -1{,}53414 - 1{,}28314\,i$

$x_4 = 2 \cdot (\cos 309^0\,54'\,32'' + i \sin 309^0\,54'\,32'') = +1{,}28314 - 1{,}53414\,i$

2) Zweite Lösung: $r = 16$, $\sqrt[4]{r} = 2$, $\varphi = 339^0\,38'\,9''$

$x_1 = 2 \cdot (\cos 129^0\,54'\,32'' + i \sin 129^0\,54'\,32'') = -1{,}28314 + 1{,}53414\,i$

$x_2 = 2 \cdot (\cos 219^0\,54'\,32'' + i \sin 219^0\,54'\,32'') = -1{,}53414 - 1{,}28314\,i$

$x_3 = 2 \cdot (\cos 309^0\,54'\,32'' + i \sin 309^0\,54'\,32'') = +1{,}28314 - 1{,}53414\,i$

$x_4 = 2 \cdot (\cos 399^0\,54'\,32'' + i \sin 399^0\,54'\,32'')$

$= 2 \cdot (\cos 39^0\,54'\,32'' + i \sin 39^0\,54'\,32'') = 1{,}53414 + 1{,}28314\,i$

c) $\sqrt[4]{625}$, $r = 625$, $\sqrt[4]{r} = 5$

$x_1 = 5 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0) = +5$, $x_2 = 5 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0) = +5i$

$x_3 = 5 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0) = -5$, $x_4 = 5 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0) = -5i$

d) $\sqrt[5]{-243}$, $r = 243$, $\sqrt[5]{r} = 3$

$x_1 = 3 \cdot (\cos 36^0 + i \sin 36^0) = 2{,}42706 + 1{,}76337\,i$

$x_2 = 3 \cdot (\cos 108^0 + i \sin 108^0) = -0{,}92706 + 2{,}85318\,i$

$x_3 = 3 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0) = -3$

$x_4 = 3 \cdot (\cos 252^0 + i \sin 252^0) = -0{,}92706 - 2{,}85318\,i$

$x_5 = 5 \cdot (\cos 324^0 + i \sin 324^0) = +2{,}42706 - 1{,}76337\,i$

e) $\sqrt[3]{-27i}$, $r = 27$, $\sqrt[3]{r} = 3$

$x_1 = 3\cdot(\cos 30^0 + i\sin 30^0) = 2{,}59809 + 1{,}5i$

$x_2 = 3\cdot(\cos 150^0 + i\sin 150^0) = -2{,}59809 + 1{,}5i$

$x_3 = 3\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0) = -3i$

f) $\sqrt{-81i}$, $r = 81$, $\sqrt{r} = 9$

$x_1 = 9\cdot(\cos 135^0 + i\sin 135^0) = -6{,}36399 + 6{,}36399i$

$x_2 = 9\cdot(\cos 315^0 + i\sin 315^0) = +6{,}36399 - 6{,}36399i$

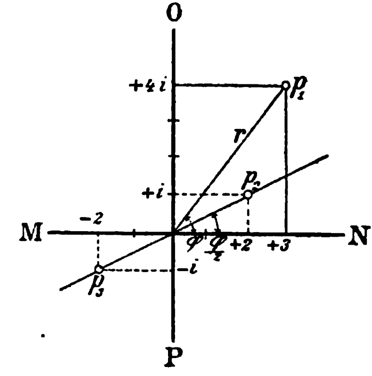
Aufgabe 72.

$\sqrt{3+4i}$, $r = 5$, $\sqrt{r} = 2{,}236$

$x_1 = +2 + i$, dargestellt durch p_2 (Figur 38).

$x_2 = -2 - i$, dargestellt durch p_3.

Figur 38.



5) Binomische Gleichungen.

Aufgabe 74. a) $x_1 = +i$, $x_2 = -i$

b) $x_1 = +1$, $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$

c) $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$

$x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$, $x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$

d) $x_1 = 1$, $x_2 = 0{,}30902 + 0{,}95106i$, $x_3 = -0{,}80902 + 0{,}58779i$

$x_4 = 0{,}30902 - 0{,}95106i$, $x_5 = -0{,}80902 - 0{,}58779i$

6) Darstellung von $\sin^n\varphi$ und $\cos^n\varphi$ durch $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$.

Aufgabe 79. a) $\cos^3\varphi = \frac{1}{4}\cdot(\cos 3\varphi + 3\cos\varphi)$

b) $\cos^4\varphi = \frac{1}{8}\cdot(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3)$

c) $\sin^5\varphi = \frac{1}{16}\cdot(\sin 5\varphi + 5\sin 3\varphi + 10\sin\varphi)$

d) $\sin^6\varphi = \frac{1}{32}\cdot(-\cos 6\varphi + 6\cos 4\varphi - 15\cos 2\varphi + 10)$

Aufgabe 80. a) $\cos^3 40^0 = 0{,}44953$, b) $\cos^4 40^0 = 0{,}344364$, c) $\sin^5 20^0 = 0{,}0047$
d) $\sin^6 20^0 = 0{,}0016$

7) Darstellung von $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ durch $\sin^n\varphi$ und $\cos^n\varphi$.

Aufgabe 85. a) $\sin 3\varphi = 3\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - \sin^3\varphi$

b) $\sin 4\varphi = 4\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi - 4\cdot\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi$

c) $\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin^2\varphi + 5\cdot\cos\varphi\cdot\sin^4\varphi$

d) $\cos 6\varphi = \cos^6\varphi - 15\cdot\cos^4\varphi\cdot\sin^2\varphi + 15\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^4\varphi - \sin^6\varphi$

Aufgabe 86. a) $\sin 3\varphi = \sin 60^0 = 0{,}86603$. b) $\sin 4\varphi = \sin 80^0 = 0{,}98441$
c) $\cos 5\varphi = \cos 275^0 = 0{,}08716$, d) $\cos 6\varphi = \cos 330^0 = 0{,}86603$

B. Formelverzeichnis.

1) $i^{4n} = +1$
2) $i^{4n+1} = +i$
3) $i^{4n+2} = -1$
4) $i^{4n+3} = -i$

wenn n irgend eine reelle, positive oder negative Zahl (einschliesslich Null) bedeutet. (Siehe Antwort auf Frage 5.)

5) $(\pm\sqrt{-a}) + (\pm\sqrt{-b}) = [(\pm\sqrt{a}) + (\pm\sqrt{b})]\cdot\sqrt{-1}$ (Siehe Antwort auf Frage 6.)

6) $(\pm\sqrt{-a}) - (\pm\sqrt{-b}) = [(\pm\sqrt{a}) - (\pm\sqrt{b})]\cdot\sqrt{-1}$ oder $= (\pm\sqrt{a} \mp \sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}$ (S. Antw. auf Frage 7.)

7) $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$ (Siehe Antwort auf Frage 8.)

8) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{-b} = \sqrt{-ab}$ (Siehe Antwort auf Frage 9.)

9) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{-a} = ai$ (Siehe Antwort auf Frage 10.)

10) $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a} = -a$ (Siehe Antwort auf Frage 11.)

11) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (Siehe Antwort auf Frage 12.)

12) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}} = i\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (Siehe Antwort auf Frage 13a.)

13) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = -i\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (Siehe Antwort auf Frage 13b.)

14) $(r\cdot i)^{4n} = r^{4n}$
15) $(r\cdot i)^{4n+1} = i\cdot r^{4n+1}$
16) $(r\cdot i)^{4n+2} = -r^{4n+2}$
17) $(r\cdot i)^{4n+3} = -i\cdot r^{4n+3}$
18) $(r\cdot i)^{-4n} = \left(\dfrac{1}{r}\right)^{4n}$
19) $(r\cdot i)^{-(4n+1)} = -\dfrac{i}{r^{4n+1}}$
20) $(r\cdot i)^{-(4n+2)} = -\left(\dfrac{1}{r}\right)^{4n+2}$
21) $(r\cdot i)^{-(4n+3)} = +\dfrac{i}{r^{4n+3}}$

wenn r den reellen Faktor der imaginären Zahl bedeutet und n eine positive ganze Zahl ist. (Siehe Antwort auf Frage 18.)

---

22) $(\pm a \pm bi) + (\pm\alpha \pm \beta i) = (\pm a \pm \alpha) + (\pm b \pm \beta)\cdot i$ (S. Antwort auf Frage 26.)

23) $(\pm a \pm bi) - (\pm\alpha + \beta i) = (\pm a \mp \alpha) + (\pm b \mp \beta)\cdot i$ (S. Antwort auf Frage 29.)

24) $(\pm a \pm bi)\cdot(\pm\alpha \pm \beta i) = (\pm a\cdot\alpha \mp b\cdot\beta) + (\pm\alpha b \pm a\beta)\cdot i$ (S. Antwort auf Frage 33.)

25) $(a+bi)\cdot\alpha = a\cdot\alpha + \alpha\cdot bi$
26) $(a+bi)\cdot\beta i = a\cdot\beta i - b\cdot\beta$

(S. Antwort auf Frage 34.)

27) $(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 + b^2$ (S. Antwort auf Frage 35.)

28) $\dfrac{\pm a \pm bi}{\pm\alpha \pm \beta i} = \dfrac{(\pm a\cdot\alpha \pm b\cdot\beta) + (\pm\alpha\cdot b \mp a\cdot\beta)\cdot i}{\alpha^2 + \beta^2}$ (S. Antwort auf Frage 38.)

29) $(a+bi):\alpha = \dfrac{a}{\alpha} + \dfrac{bi}{\alpha}$
30) $(a+bi):\beta i = -\dfrac{ai}{\beta} + \dfrac{b}{\beta}$

(S. Antwort auf Frage 40.)

31) $\dfrac{1}{a \pm bi} = \dfrac{a \mp bi}{a^2 + b^2}$ (S. Antwort auf Frage 42.)

32) $(a \pm bi)^n = a^n - \dfrac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot a^{n-4}\cdot b^4 - \cdots$

$+ \left(\pm n\cdot a^{n-1}\cdot b \mp \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 \pm \cdots\right)\cdot i$

(Alle oberen Zeichen gelten für $(a+bi)^n$, alle unteren für $(a-bi)^n$ (S. Antw. auf Fr. 48.)

33) $(a \pm bi)^{-n} = \frac{1}{(a \pm bi)^n}$ (Siehe Formel 32.)

34) $\sqrt{+a \pm bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{+a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$ (S. Antw. auf Frage 51.)

---

35) $(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)\cdots = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdots$
$[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots)]$ (S. Antwort auf Frage 67.)

36) $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$,
wenn $(a+bi) = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $(\alpha+\beta i) = r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ ist.
(S. Antwort auf Frage 71.)

37) $\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{r_1}\cdot(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$, wenn $(a+bi) = r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ ist. (S. Antwort auf Fr. 72.)

38) $(a+bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, wenn $(a+bi) = r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ist.
(S. Antwort auf Frage 76.)

39) $(a+bi)^{-n} = \frac{1}{r^n}\cdot(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$ od. $\frac{1}{r^n}[\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi)]$ (S. Antwort auf Frage 76.)

40) $(a-bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$, wenn $(a-bi) = r\cdot(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ ist.
(S. Antwort auf Frage 77.)

41) $\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$, wenn $(a+bi) = r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ist.
(S. Antwort auf Frage 80 und Formel 45 und 46.)

42) $(\sqrt[n]{a+bi})^m$ oder $\sqrt[n]{(a+bi)^m} = \sqrt[n]{r^m}\cdot\left(\cos\frac{m\varphi}{n}+i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)$ (S. Antw. auf Frage 81.)

43) $\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$

44) $\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\cdot\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{(2k+1)\cdot\pi}{n}$

45) $\sqrt[n]{+(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$

46) $\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left\{\cos\left[\frac{\varphi+(2k+1)\cdot\pi}{n}\right]+i\cdot\sin\left[\frac{\varphi+(2k+1)\cdot\pi}{n}\right]\right\}$

(43–46: S. Antwort auf Frage 83.)

47) $\sqrt[n]{+ai} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+1)\cdot\pi}{2n}+i\cdot\sin\frac{(4k+1)\cdot\pi}{2n}\right]$

48) $\sqrt[n]{-ai} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+3)\cdot\pi}{2n}+i\cdot\sin\frac{(4k+3)\cdot\pi}{2n}\right]$

(47–48: S. Antwort auf Frage 84.)

---

49) $\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos(n-6)\varphi\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\frac{n}{2}}\right]$ bei geradem n. (S. Antw. auf Frage 90.)

50) $\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos(n-6)\varphi+\cdots+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\cos\varphi\right]$

bei ungeradem n. (S. Antwort auf Frage 90.)

51) $$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}}\cdot\Big[\cos n\varphi - n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos(n-6)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\frac{n}{2}}\Big]$$

bei **geradem** n. (Siehe Antwort auf Frage 91.)

52) $$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\cdot\Big[\sin n\varphi - n\cdot\sin(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\sin(n-4)\varphi - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\sin(n-6)\varphi + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\sin\varphi\Big]$$

bei **ungeradem** n. (S. Antwort auf Frage 91.)

53) $$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\cos^{n-6}\varphi\cdot\sin^6\varphi + \cdots$$ (S. Antw. auf Fr. 92.)

54) $$\sin^n\varphi = n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - \cdots$$ (S. Antw. auf Fr. 93.)

---

55) $$e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\cdots$$

56) $$e^x = \left(1+\frac{x}{n}\right)^x = 1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

57) $$e^{-x} = \left(1-\frac{x}{n}\right)^x = 1-x+\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdots$$

(S. Antw. auf Frage 94.)

58) $$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \text{ oder } = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$$ (S. Antwort auf Frage 96.)

59) $$l(a+bi) = \frac{1}{2}\cdot l(a^2+b^2)+i\cdot\text{arc tg}\,\frac{b}{a}$$ (S. Antwort auf Frage 97.)

60) $$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi}+e^{-ni\varphi})+n\cdot(e^{(n-2)i\varphi}+e^{-(n-2)i\varphi})+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot(e^{(n-4)i\varphi}+e^{-(n-4)i\varphi})+\cdots\right]$$ (S. Antwort auf Frage 98.)

61) $$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi}-e^{-ni\varphi})-n\cdot(e^{(n-2)i\varphi}+e^{-(n-2)i\varphi})+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot(e^{(n-4)i\varphi}-e^{-(n-4)i\varphi})-\cdots\right]$$ (S. Antwort auf Frage 99.)

